Chapitre-4
Logique du 1er ordre
- Syntaxe -

Plan

1- Introduction

2- Alphabet

3-Termes d'un langage

4- Formule de la logique du 1er ordre

5-Sous-formule d'une formule du 1er ordre

6- Arbre de décomposition

7- Longueur - profondeur - complexité d'une formule

8- Simplification syntaxique d'une formule:

9- Variables libres et variables liées

10- Substitution

Plan

1- Introduction

2- Alphabet

3-Termes d'un langage

4- Formule de la logique du 1er ordre

5-Sous-formule d'une formule du 1er ordre

6- Arbre de décomposition

7- Longueur - profondeur - complexité d'une formule

8- Simplification syntaxique d'une formule:

9- Variables libres et variables liées

10- Substitution

1- Introduction

Limites de la logique propositionnelle(1)

1. La logique propositionnelle a une expressivité limitée par rapport au langage naturel:

   On considère la phrase comme un bloc indivisible

Exemple « Mohamed habite à Constantine »

On ne peut pas considérer séparément:

Mohamed,

Constantine,

et la relation « habiter à »

1- Introduction

Limites de la logique propositionnelle(2)

2- En logique propositionnelle on n'arrive pas à prouver certaines propositions pourtant très intuitives

Exemple:

Tous les humains sont mortels.

Socrate est un humain.

Donc Socrate est mortel.

La formalisation de cet énoncé en logique propositionnelle donne la formule:

$$\varphi = A \wedge B \rightarrow C$$

A: Tous les humains sont mortels

B: Socrate est un humain

C: Socrate est mortel

On <u>ne peut pas prouver</u> que:

φ est toujours Vraie

1- Introduction

Tous les humains sont mortels.

Socrate est un humain.

Donc Socrate est mortel.

1- Introduction

La logique des propositions traite les propositions comme **un tout**.

- Ce qui manque à la logique propositionnelle c'est de pouvoir parler **d'objets**, de **propriétés d'objets** et de mettre en **relation** des objets.

- La **logique du 1er ordre** nous permettra de modéliser ces situations.

1- Introduction

La célèbre phrase de Socrate

« Tous les humains sont mortels. »

peut être analysée plus finement à l'aide
du prédicat *est.humain* ,
du prédicat *est.mortel*,
et de la variable d'individu x qui représentera génériquement l'homme.

Ainsi, « Tous les humains sont mortels. »

peut être traduit par la formule

$$\forall x\ (est.humain(x) \rightarrow est.mortel(x))\ .$$

1- Introduction

- La <u>logique du premier ordre</u> (ou <u>logique des prédicats</u>) est la partie de la logique qui traite des *propositions analysées*.

- Ceci signifie que:
  - on ne se contente plus de la notion de proposition vue comme un bloc (et notée, dans le cas élémentaire par des variables propositionnelles).
  - La proposition est divisée (selon les termes anciens) en son *sujet* et son *prédicat*

- Platon fut le premier, à avoir réfléchi à cette décomposition (Il a introduit en effet la division fondamentale de la phrase grecque en composant nominal et composant verbal).

1- Introduction

❑Exemple

'Mohamed habite Constantine',
'Ali habite Constantine',
'Sara habite Constantine'

sont des instances d'un même moule:

'*x* habite Constantine'.

où

- ❑ ***x* est une variable** **(elle marque la place du "sujet".)**
- ❑**'habite Constantine', est un Groupe Verbal.**
  (il s'agit d'un *prédicat*.)

❑Notation

Habite.constantine(Mohamed)
Habite.constantine(Ali)
Habite.constantine(Sara)

1- Introduction

Un Prédicat peut avoir plusieurs arguments

Exemples

Mohamed habite Constantine
Ali habite Annaba
Sara habite Alger

x habite y

La partie verbale elle-même peut être analysée. La constante 'habite' est utilisée pour dénoter une relation entre des individus et des villes

Habite(x,y): x Habite y

1- Introduction

Logique Propositionnelle & Logique du 1er ordre

- La logique propositionnelle représente le monde par des faits

- La logique du 1er ordre représente le monde par :
  - des objets : Mohamed, Socrate, 0,1, Constantine …
  - des propriétés des objets et des relations entre ces objets: est.mortel, est.le.père.de, est.inféieur.à, habite,…
  - Des fonctions sur ces objets: père.de, succ, carré, +, …

1- Introduction

Etude de la logique du 1er ordre:

- **Comment écrire une formule?**
  Aspects syntaxiques

- **Comment déterminer la valeur de vérité d'une formule?**
  Aspects sémantiques

- **Comment démontrer(automatiquement) de nouveaux résultats?**
  Aspects Preuves

Ce chapitre concerne les aspects syntaxiques

Plan

1- Introduction

2- Alphabet

3-Termes d'un langage

4- Formule de la logique du 1er ordre

5-Sous-formule d'une formule du 1er ordre

6- Arbre de décomposition

7- Longueur - profondeur - complexité d'une formule

8- Simplification syntaxique d'une formule:

9- Variables libres et variables liées

10- Substitution

2- Alphabet

L'alphabet d'un langage L du 1er ordre comporte :

- un ensemble V de variables d'objets
- les connecteurs $\neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$
- les parenthèses ( ) et la virgule ,
- l'identité $\equiv$
- les quantificateurs $\forall$ $\exists$

Les symboles communs à tous les langages

- les symboles de constantes (individus)
- les symboles de prédicats (ou relations)
- les symboles de fonctions

Les symboles qui caractérisent le langage L

2- Alphabet

Exemples de Constantes

- Socrate
- Mohamed
- Constantine
- 4
- a , b

2- Alphabet

Exemples de Symboles de relations(ou de prédicats)

- **Mortel(x): x est mortel**
- **humain(*x*): *x* est humain**
- **P(x): x est pair**
- **S(*x,y*): *x* est supérieur à *y*.**
- **E(*x,y,z*): *x* est entre *y* et *z.***
- **E(*y,x,z*): *y* est entre *x* et *z*.**
- **E’(*x,y,z*): *y* est entre *x* et *z*.**
- **x>y : x est supérieur strictement à y**

2- Alphabet

Exemples de Symboles de fonctions

$succ(x) = x + 1$

$g(x, y) = x + y$

$h(x, y, z) = x * y - z$

Père(x)

2- Alphabet

A chaque prédicat p (resp. fonction f), on associe un entier positif appelé *l'arité* de p (resp. de f) qui désigne le nombre d'arguments de p (resp. de f)

Il existe une grande variété de langages du 1er ordre, chacun étant défini par son vocabulaire (symboles de fonctions et symboles de prédicats, constantes)

2- Alphabet

L'alphabet d'un langage L du 1er ordre comporte :

- un ensemble V de variables d'objets
- les connecteurs $\neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$
- les parenthèses ( ) et la virgule ,
- l'identité $\equiv$
- les quantificateurs $\forall$ $\exists$

Les symboles communs à tous les langages

- les symboles de constantes (individus)
- les symboles de prédicats (ou relations)
- les symboles de fonctions

Les symboles qui caractérisent le langage L

2- Alphabet

Exemple de langages du 1er ordre:

L0: Constante: Socrate

Prédicats :

h(x) : x est humain

m(x): x est mortel

$$\boxed{(\ \forall x\ (\ h(x) \rightarrow m(x)\ )\ \wedge\ h(Socrate)\ )\ \rightarrow m(Socrate)}$$

2- Alphabet

Exemple de langages du 1e ordre:

L 1 contient - un prédicat unaire r
- et une constante c

L2 contient - un prédicat binaire p
- une fonction unaire f
- deux fonctions binaire g h
- deux constantes a b

Plan

1- Introduction

2- Alphabet

3-Termes d'un langage

4- Formule de la logique du 1er ordre

5-Sous-formule d'une formule du 1er ordre

6- Arbre de décomposition

7- Longueur - profondeur - complexité d'une formule

8- Simplification syntaxique d'une formule:

9- Variables libres et variables liées

10- Substitution

3-Termes d'un langage

- Un terme désigne un objet
- L'ensemble des termes d'un langage L est défini par:

• ***Si*** a est une constante ***Alors*** a est un terme

• ***Si*** x est une variable ***Alors*** x est un terme

•***Si*** f est un symbole de fonction d'arité n et t1,t2,….tn des termes de L ***Alors*** f(t1,t2,…,tn) est un terme

3-Termes d'un langage

Exemple

L0: Constante: Socrate

Prédicats :

h(x) : x est humain

m(x): x est mortel

Les termes du langage L0 sont:

la constante: Socrate

les variables: x y z….

3-Termes d'un langage

Exemple

L 1 contient - un prédicat unaire r
- et une constante c

Les termes du langage L1 sont:

la constante: c

les variables: x y z….

3-Termes d'un langage

Exemple

L2 contient

- **un prédicat binaire p**
- **une fonction unaire f**
- **deux fonctions binaire g h**
- **deux constantes a b**

Quelques termes du langage L2 sont :

Les constantes: a, b

Les variables: x , y ….

f(a) f(b) f(x) f(y) f(f(a)) f(f(f(x))) …

g(a,a) g(a,b) g(x,a) g(f(a),b) g(x,f(f(f(a))))

f(g(f(b),x)) h(g(a,b),x) …

3-Termes d'un langage

- L'**ordre** d'un terme **t** est le nombre d'occurrence de signes fonctionnels dans **t**.

  Exemple: le terme f(g(x,y, f(z,a)) est d'ordre 3

- Les termes **d'ordre 0** sont les variables et les constantes

- Un terme est **Clos** (ou fermé) ssi il ne contient aucune variable

  Exemple: f(a) est clos

Plan

1- Introduction

2- Alphabet

3-Termes d'un langage

4- Formule de la logique du 1er ordre

5-Sous-formule d'une formule du 1er ordre

6- Arbre de décomposition

7- Longueur - profondeur - complexité d'une formule

8- Simplification syntaxique d'une formule:

9- Variables libres et variables liées

10- Substitution

4- Formule de la logique du 1er ordre

Définition

φ est une formule de la logique du 1er ordre ssi

il existe une suite finie de formules $\varphi 1, \varphi 2, .. \varphi n$ / $\varphi n = \varphi$ et $\forall i=1,n$ on est dans l'un des cas suivants:

- **$\varphi i = \quad t \equiv t'$ avec t et t' des termes**
- **$\varphi i = \ p(t1,..tn)$ avec p: un prédicat de poids n et $t1, t2, .. tn$: des termes**
- **$\exists j<i \quad \varphi i = \urcorner \varphi j$**
- **$\exists j1, j2$ et $K \in \{\wedge, v, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ / $\varphi i = \varphi j1 \ K \ \varphi j2$**
- **$\exists j<i$ et x une variable et $Q \in \{\forall, \exists\}$ tel que $\varphi i = \ Qx \ \varphi j$**

4- Formule de la logique du 1er ordre

Exemple

L0: Constante: Socrate

Prédicats :

h(x) : x est humain

m(x): x est mortel

Quelques formules du langage L0 sont:

$h(Socrate)$

$\neg h(Socrate)$

$h(Socrate) \wedge \neg m(Socrate)$

$\forall x\, m(x) \rightarrow m(Socrate)$

4- Formule de la logique du 1er ordre

Exemple

L 1 contient - un prédicat unaire r
- et une constante c

Quelques formules du langage L1 sont:

$x \equiv c$

$r(c)$

$(x \equiv c) \vee \neg(c \equiv c) \rightarrow r(c)$

$r(c) \vee \neg\exists x\, r(x)$

$\forall y\, \exists x\, (r(y) \rightarrow r(x))$

4- Formule de la logique du 1er ordre

Exemple

L2 contient
- **un prédicat binaire p**
- **une fonction unaire f**
- **deux fonctions binaire g h**
- **deux constantes a b**

Quelques formules du langage L2 sont:

$$(x \equiv a) \wedge (g(y,x) \equiv b)$$

$$\forall x\, \exists y\, (g(x,y) \equiv a \wedge g(y,x) \equiv b)$$

$$\forall x\, \neg (f(x) \equiv a)$$

4- Formule de la logique du 1er ordre

- **Une formule φ d'un langage L est dite atomique ssi:**
  - $\varphi = t1 \equiv t2$ **où t1,t2 sont des termes de L**
  - $\varphi = p(t1,t2,\ldots,tn)$ **où p est un prédicat d'arité n et t1,t2,..tn sont des termes de L**

4- Formule de la logique du 1er ordre

Définition

φ est une formule de la logique du 1er ordre ssi

il existe une suite finie de formules $\varphi 1, \varphi 2, .. \varphi n$ / $\varphi n = \varphi$ et $\forall i=1,n$ on est dans l'un des cas suivants:

- $\varphi i = t \equiv t'$ avec t et t' des termes
- $\varphi i = p(t1,..tn)$ avec p: un prédicat de poids n et $t1,t2,..tn$: des termes

Formules atomiques

- $\exists j<i$ $\varphi i = \rceil \varphi j$
- $\exists j1,j2$ et $K \in \{\wedge, v, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ / $\varphi i = \varphi j1\ K\ \varphi j2$
- $\exists j<i$ et x une variable et $Q \in \{\forall, \exists\}$ tel que $\varphi i = Qx\ \varphi j$

4- Formule de la logique du 1er ordre

Exemples de traduction d'énoncés en formules

`` Tout est relatif. ''

langage

Prédicat unaire r

r(x): « x est relatif »

formule

$\forall x \; r(x)$

4- Formule de la logique du 1er ordre

Exemples de traduction d'énoncés en formules

`` Une porte est ouverte ou fermée. ''

langage

3 Prédicats unaires

porte(x): « x est une porte »

ouvert(x): « x est ouvert »

fermé(x)): « x est fermé »

formule

$\forall$ **x (porte(x) $\rightarrow$ (ouvert(x) v fermé(x)))**

4- Formule de la logique du 1er ordre

Exemples de traduction d'énoncés en formules

`` Tous les chemins mènent à Rome. ''

langage

2 Prédicats unaires

chemin(x): « x est un chemin »

mène-à-rome(x): « x mène à Rome »

formule

$\forall$x (chemin(x) $\rightarrow$ mème-à-Rome(x))

4- Formule de la logique du 1er ordre

Exemples de traduction d'énoncés en formules

`` Tous les chemins mènent à Rome. ''

langage

1 Prédicat unaires ,1 prédicat binaire, 1 constante

chemin(x): « x est un chemin »

mène(x,y): « x mène à y »

Constante: Rome

formule $\forall x\ (\text{chemin}(x) \rightarrow \text{mène}(x,\text{Rome}))$

4- Formule de la logique du 1er ordre

Exemples de traduction d'énoncés en formules

`` Pour tout entier il existe un entier plus grand. "

langage

1 Prédicat unaires ,1 prédicat binaire

entier(x): « x est un entier »

Plus-grand(x,y): « x plus grand que y »

formule

$\forall$ x (entier(x) $\rightarrow$ $\exists$ y (entier(y) $\wedge$ plus-grand(y,x)))

4- Formule de la logique du 1er ordre

Exemples de traduction d'énoncés en formules

`` Pour tout entier il existe un entier plus grand. ''

langage

1 Prédicat unaires ,1 prédicat binaire

e(x): « x est un entier »

x > y : « x plus grand que y »

formule

$\forall x\ (e(x) \rightarrow \exists y\ (e(y) \wedge (y>x))\ )$

4- Formule de la logique du 1er ordre

Exemples de traduction de formule en énoncé

$\exists x(\ restaurant(x) \land servir(x, sushi) \ \land \ \hat{e}trePr\grave{e}sDe(x, laGare))$

langage

2 Constantes: Sushi, laGare

1 Prédicat unaire

restaurant(x): « x est un restaurant »

2 prédicats binaires

Servir(x,y): « x sert y »

êtrePrésDe(x,y): « x est prés de y »

énoncé

« il existe au moins un restaurant qui sert du sushi et qui est prés de la gare »

4- Formule de la logique du 1er ordre

Exemples de traduction de formule en énoncé

$\forall x\ (restaurantJaponais(x) \rightarrow servir(x, sushi))$

langage

1 Constantes: Sushi

1 Prédicat unaire

restaurantJaponais(x): « x est un restaurant japonais»

1 prédicat binaire

Servir(x,y): « x sert y »

énoncé **« Tous les restaurants japonais servent du sushi »**

Plan

1- Introduction

2- Alphabet

3-Termes d'un langage

4- Formule de la logique du 1er ordre

5-Sous-formule d'une formule du 1er ordre

6- Arbre de décomposition

7- Longueur - profondeur - complexité d'une formule

8- Simplification syntaxique d'une formule:

9- Variables libres et variables liées

10- Substitution

5-Sous-formule d'une formule du 1er ordre

Les *sous-formules* d'une formule φ sont définies par:

- **φ est une sous-formule de φ.**
- **Si $\neg\varphi'$ est une sous-formule de φ**

  alors φ' est une sous-formule de φ.
- **Si $\varphi 1$ K $\varphi 2$ (K$\in$ $\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$) et est une sous-formule de φ**

  alors $\varphi 1$ et $\varphi 2$ sont des sous-formules de φ .
- **Si Q x φ' (Q$\in$ $\{\forall, \exists\}$) est une sous-formule de φ**

  alors φ' est une sous-formule de φ.

5-Sous-formule d'une formule du 1er ordre

Exemple

Soit la formule $\varphi = ((p(x) \vee r(a)) \wedge \forall x\,(f(x) \equiv b)$.

Les sous-formules de φ sont:

$(p(x) \vee r(a)) \wedge \forall x\,(f(x) \equiv b)$,

$p(x) \vee r(a)$ $\quad\quad$ $\forall x\, f(x) \equiv b$

$p(x)$ $\quad$ $r(a)$ $\quad\quad$ $f(x) \equiv b$

Plan

1- Introduction

2- Alphabet

3-Termes d'un langage

4- Formule de la logique du 1er ordre

5-Sous-formule d'une formule du 1er ordre

6- Arbre de décomposition

7- Longueur - profondeur - complexité d'une formule

8- Simplification syntaxique d'une formule:

9- Variables libres et variables liées

10- Substitution

6- Arbre de décomposition

❑ **Toute formule d'un langage du premier ordre se décompose de manière unique sous forme d'arbre de la manière suivante.**

❑ ***Procédure de décomposition:***

- **on découpe au niveau du connecteur ou quantificateur principal de la formule.**

- **on enlève les parenthèses les plus externes de chacun des arguments du connecteurs ou quantificateur principal**

- **on répète l'opération de décomposition pour chacun des arguments jusqu'à arriver au formules atomiques.**

6- Arbre de décomposition

Exemple

$$\varphi = \quad (p(x) \vee r(a)) \wedge ((\forall x\, (f(x) \equiv b\,)) \rightarrow \neg(\exists y(\, p(b)))\,)$$

$$p(x) \vee r(a) \qquad\qquad (\forall x\, (f(x) \equiv b)\,) \rightarrow \neg(\exists y\, (p(b)))$$

$$p(x) \qquad r(a) \qquad \forall x\, (f(x) \equiv b\,) \qquad \neg(\exists y(\, p(b)))$$

$$f(x) \equiv b \qquad \exists y(\, p(b))$$

$$p(b)$$

Plan

1- Introduction

2- Alphabet

3-Termes d'un langage

4- Formule de la logique du 1er ordre

5-Sous-formule d'une formule du 1er ordre

6- Arbre de décomposition

7- Longueur - profondeur - complexité d'une formule

8- Simplification syntaxique d'une formule:

9- Variables libres et variables liées

10- Substitution

7- Longueur - profondeur - complexité d'une formule

a) Longueur d'une formule:

La longueur d'une formule du 1er ordre est le nombre de symboles (de l'alphabet du langage) qu'elles contient.

Exemple

φ	Long(φ)
$\forall x\ p(x)$	6
$\exists x\ \exists y\ \forall x1\ x2\ \ p(x, y)$	14
p2 (x,y,const1)	8

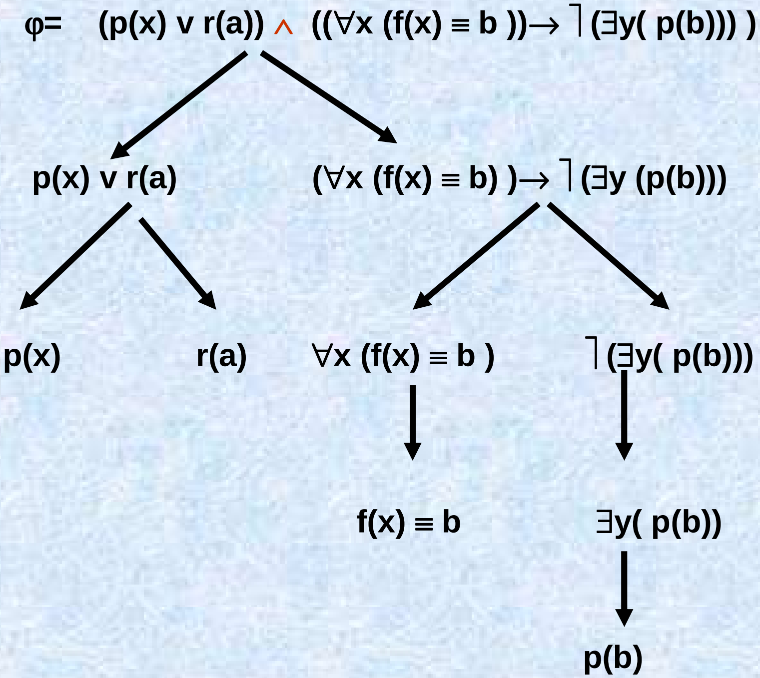
b) Profondeur d'une formule:

la profondeur d'une FP correspond à la profondeur de l'arbre de décomposition

Exemple

$$\varphi = \quad (p(x) \vee r(a)) \wedge ((\forall x\,(f(x) \equiv b\,)) \rightarrow \neg(\exists y(\,p(b)))\,)$$

Prof(φ)=4



7- Longueur - profondeur - complexité d'une formule

La profondeur d'une formule φ est définie de la manière suivante:

- Si $\varphi = t \equiv t'$ où t et t' des terme alors $prof(\varphi)=0$
- Si $\varphi = p(t1,t2,\ldots,tn)$ où p est un prédicat n-aire alors $prof(\varphi)=0$
- Si $\varphi = \neg\varphi 1$ où où $\varphi 1$ est une formule alors $prof(\varphi)=1+prof(\varphi 1)$
- Si $\varphi = Qx\ \varphi 1$ où où et Q un quantificateur

  alors $prof(\varphi)=1+prof(\varphi 1)$
- Si $\varphi = \varphi 1\ K\ \varphi 2$ ($K \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$)

  alors $prof(\varphi)=1+\max(prof(\varphi 1), prof(\varphi 2))$

7- Longueur - profondeur - complexité d'une formule

c) Complexité (ordre) d'une formule:

- L'ordre d'une formule du 1er ordre est nombre d'occurrences dans φ d'un connecteur ou d'un quantificateur.

- Les formules d'ordre 0 sont dites atomiques (élémentaires)

Exemple

φ	$c(\varphi)$
$\forall x\ p(x)$	1
$\exists x\ \exists y\ \forall x1\ x2\quad p(x, y)$	4
$\exists x\ p2\ (x,y,const1) \vee \rceil (x \equiv y)$	3

7- Longueur - profondeur - complexité d'une formule

La complexité d'une formule φ est noté $c(\varphi)$ et est définie par:

- Si φ est une formule atomique alors $c(\varphi)= 0$
- Si $\varphi=\neg\varphi'$ alors $c(\varphi)=1+c(\varphi')$
- Si $\varphi= Qx\ \varphi'$ alors $c(\varphi)= 1 +c(\varphi')$
- Si $\varphi=(\varphi' K\varphi'')$ et $K\in \{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$ alors $c(\varphi)= c(\varphi')+c(\varphi'')+1$

Plan

1- Introduction

2- Alphabet

3-Termes d'un langage

4- Formule de la logique du 1er ordre

5-Sous-formule d'une formule du 1er ordre

6- Arbre de décomposition

7- Longueur - profondeur - complexité d'une formule

8- Simplification syntaxique d'une formule:

9- Variables libres et variables liées

10- Substitution

8- Simplification syntaxique d'une formule:

Pour alléger l'écriture des formules on supprime certaines parenthèses superflues en tenant compte de certaines conventions:

1- Elimination des parenthèses de part et d'autre d'une formule atomique

***Exemple*:**

$\exists x(p(x))$ sera simplifiée en $\exists x\ p(x)$
$\forall x \forall y\ (f(x) \equiv f(y))$ sera simplifiée en $\forall x \forall y\ f(x) \equiv f(y)$
$\forall x\ (p(x)) \vee \exists\ y\ (p(y))$ sera simplifiée en $\forall x\ p(x) \vee \exists\ y\ p(y)$

8- Simplification syntaxique d'une formule:

2- Suppression des parenthèses qui séparent des négations consécutives

Exemple:

$\neg(\neg(\neg(\neg(p(a)\wedge p(b)))))$ sera notée $\neg\neg\neg\neg(p(a)\wedge p(b))$

$\neg(\neg p(a))$ sera noté $\neg\neg p(a)$

3-Elimination des parenthèses qui séparent des quantificateurs successifs:

Q1x1 (Q2x2(…(Qnxn(φ))…) sera noté Q1x1 Q2x2 …Qnxn (φ)
où Q1 , Q2 ,…Qn sont des quantificateurs

Exemple

$$\exists x(\exists y(\forall x\ (r(x,y)\wedge p(x))))$$

est simplifié en $\exists x\exists y\forall x\ (r(x,y)\wedge p(x))$

8- Simplification syntaxique d'une formule:

4- $\forall x1 \forall x2 \forall x3 \ldots \forall xn\ \varphi$ **est remplacé par** $\forall x1x2..xn\ \varphi$

$\exists x1 \exists x2 \exists x3 \ldots \exists xn\ \varphi$ **est remplacé par** $\exists x1x2..xn\ \varphi$

Exemple:

$$\forall x \forall y \exists z \exists x \forall y\ p(x,y)$$

est remplacée par $\forall x\ y\ \exists z\ x\ \forall y\ p(x,y)$

5- Application des Règles de priorité entre connecteurs et quantificateurs:

$\rceil\ \forall\ \exists$

$\wedge$, **v** **avec associativité à gauche**

$\rightarrow, \leftrightarrow$ **avec associativité à gauche**

8- Simplification syntaxique d'une formule:

Exemple

$$\forall x(\forall y(\forall z(\exists x1(\forall x2(\forall x4 ((x\equiv a) \; v \urcorner (p(x))))))) \rightarrow ((p(y)) \; v \; (p(a)))$$

$$\forall x(\forall y(\forall z(\exists x1(\forall x2(\forall x4 ((x\equiv a) \; v \urcorner (p(x))))))) \rightarrow ((p(y)) \; v \; (p(a)))$$

$$\forall x(\forall y(\forall z(\exists x1(\forall x2(\forall x4 (\; x\equiv a \; v \urcorner p(x)))))) \rightarrow (p(y) \; v \; p(a)))$$

$$\forall x(\forall y\forall z\exists x1\forall x2\forall x4 (\; x\equiv a \; v \urcorner p(x)) \; \rightarrow (p(y) \; v \; p(a)))$$

$$\forall x(\forall y\forall z\exists x1\forall x2\forall x4 (\; x\equiv a \; v \urcorner p(x)) \; \rightarrow \; p(y) \; v \; p(a))$$

$$\forall x(\forall y \; z \; \exists x1\forall x2 \; x4 (\; x\equiv a \; v \urcorner p(x)) \; \rightarrow \; p(y) \; v \; p(a))$$

Plan

1- Introduction

2- Alphabet

3-Termes d'un langage

4- Formule de la logique du 1er ordre

5-Sous-formule d'une formule du 1er ordre

6- Arbre de décomposition

7- Longueur - profondeur - complexité d'une formule

8- Simplification syntaxique d'une formule:

9- Variables libres et variables liées

10- Substitution

9- Variables libres et variables liées

• **Champ d'un quantificateur (portée d'un quantificateur)**

Le champ d'un quantificateur Qx dans une formule φ est la partie de la formule sur laquelle opère le quantificateur

Exemple $\forall x(\exists y\,(p(x,y) \rightarrow p(y,x))\wedge x=y)$

Champ de ∀x

Champ de ∃y

9- Variables libres et variables liées

• Occurrence d'une variable dans une formule

On appelle ***occurrence*** d'une variable **x** dans une formule **φ**, chaque endroit où **x** apparaît de façon ***effective*** dans **φ** (c'est à dire qui ne suit pas un quantificateur)

Exemple:

$$p(x, z) \rightarrow \forall z\ (\ r\ (y, z)\ v\ \ y= z)$$

La variable x a 1 occurrence,
La variable y a 2 occurrences
La variable z a 3 occurrences

9- Variables libres et variables liées

• Occurrence libre/liée d'une variable

Une occurrence de la variable x dans une formule φ est une occurrence libre ssi elle ne se trouve dans le champs d'aucun quantificateur sur x (i.e. $\forall x$ ou $\exists x$). Dans le cas contraire , l'occurrence de x est dite liée.

Exemple: $\forall x(p(x) \wedge r(x)) \vee r(y)$

la 1ère occurrence de x est liée
la 2ème occurrence de x est liée
L'occurrence de y est libre

9- Variables libres et variables liées

Définition

- **Si φ est un atome alors toutes les occurrences de x dans φ sont libres**
- **Si $\varphi = \neg\varphi'$ alors les occurrences libres de x dans φ sont celles de φ'**
- **Si $\varphi = \varphi 1 \; K \; \varphi 2$ alors les occurrences libres de x dans φ sont l'union de celles de $\varphi 1$ et de $\varphi 2$ (K: un connecteur binaire)**
- **Si $\varphi = Qy \;\; \varphi'$ alors les occurrences libres de x dans φ sont celles de φ' (où y est différent de x)**
- **Si $\varphi = Qx \;\; \varphi'$ alors x n'a aucune occurrence libres dans φ**

9- Variables libres et variables liées

Une variable peut avoir des occurrences libres et d'autres liées dans la même formule

Exemples $\forall y\ ((p(x) \vee \exists x\ p(x)) \wedge q(y))$

la 1ère occurrence de x est libre
la 2ème occurrence de x est liée
L'occurrence de y est liée.

9- Variables libres et variables liées

• Variable libre/liée

- Une variable est libre dans une formule φ ssi elle a au moins une occurrence libre dans φ

Exemple: $\forall x\ \exists z\ p(x,z) \wedge p(y, z) \rightarrow p(x,y)$

x , y , z sont libres

- Une variable est liée dans une formule φ ssi toute ses occurrences sont liées (ou elle n'a aucune occurrence libre) dans φ

Exemple: $\forall x\ \exists z\ (p(x,z) \wedge p(z,x))$

x et z sont liées

9- Variables libres et variables liées

Remarque

- **Il est recommandé lorsque une même variable a des occurrences libres et d'autres liées de changer le nom soit de la variable libre, soit de la variable liée.**

Exemple $\forall x\ \exists z\ p(x,z) \wedge p(y, z) \rightarrow p(x,y)$ **x , y , z libres**

est équivalente à

$\forall x\ \exists z\ p(x,z) \wedge p(y, z1) \rightarrow p(x1,y)$ **x1 , y , z1 libres**

Ou bien $\forall x2\ \exists z2\ p(x2,z2) \wedge p(y, z1) \rightarrow p(x1,y)$

- **Ceci est important, comme nous le verrons plus loin (chapitre sémantique)**
- **Un tel changement de nom de variable a l'avantage de nous faire éviter toute confusion.**

9- Variables libres et variables liées

• **Formule close/ formule ouverte**

- **Une formule close (fermée) est une formule sans variables libres**

- **Une formule ouverte est une formule qui a au moins une variable libre**

Exemples

$\varphi 1 = \forall y \, ((p(\underline{x}) \lor \exists x \, p(x)) \land q(y))$ **est ouverte**

$\varphi 2 = \forall x \, \forall y \, ((p(x) \lor \exists x \, p(x)) \land q(y))$ **est close**

On note $\varphi(x1,x2,..xn)$ pour désigner une formule ouverte pour laquelle les variables libres sont x1,x2,..xn.

Plan

1- Introduction

2- Alphabet

3-Termes d'un langage

4- Formule de la logique du 1er ordre

5-Sous-formule d'une formule du 1er ordre

6- Arbre de décomposition

7- Longueur - profondeur - complexité d'une formule

8- Simplification syntaxique d'une formule:

9- Variables libres et variables liées

10- Substitution

10- Substitution

- une substitution de variables est un ensemble fini de couples associant à une variable un terme, notée:

  [t1/x1, ... , tn/xn] tel que xi = xj implique i = j.

- L'application de la substitution [t1/x1, ... , tn/xn] à une formule φ notée : (φ)[t1/x1, ... , tn/xn]

est le résultat de la substitution *simultanée* dans φ de chaque xi par ti.

10- Substitution

- la substitution de la variable x par un terme t dans φ revient à remplacer toutes les occurrences libres de x par t tel que la condition suivante soit vérifiée:

$\forall y$ y :une variable de t,
x n'est pas dans le champs d'un quantificateur sur y dans φ

Exemple

$$\varphi = x \equiv y \lor \exists y\, p(x,y) \lor \exists x\, p(x,x)$$

$$\varphi\,[f(z)/x] = f(z) \equiv y \lor \exists y\, p(f(z),y) \lor \exists x\, p(x,x)$$

$$\varphi\,[f(y)/x] = \varphi$$

10- Substitution

Exemple

$(p(x) \vee q(x,y))\,[z/x]$	$= p(z) \vee q(z,y)$
$(p(x) \vee q(x,y))\,[y/x]$	$= p(y) \vee q(y,y)$
$(\forall x\; q(x,y))[z/x]$	$= \forall x\; q(x,y)$
$(p(x) \vee q(x,y))[f(x)/x]$	$= p(f(x)) \vee q(f(x),y)$
$(\forall x\; q(x,y) \vee p(x))[z/x]$	$=\forall x\; q(x,y) \vee p(z)$