PROBLEME

Au ministère de l 'agriculture, on a é tabli l a f onction de profit s uivante pour les f ermes cultivant des germes de soja et des pistaches :

$$P(x, y) = 600x + 800y - x^2 - 2y^2 - 2xy$$

Où $P(x, y)$ sont les profits annuels en DA, x représente le nombre d'hectares plantés en germes de soja, et y donne le nombre d'hectares plantés en pistaches.
Un f ermier pos sède une t erre de 50 0 hectares. C omment devrait-il a llouer ses t erres à ces deux c ultures pour obtenir un p rofit maximal, sachant que l a surface réservée au soja (x) n e doit pa s dépasser 350hec? U tiliser l a méthode de KKT . M ontrer qu' il s 'agit d' un maximum absolu et donner le montant du profit obtenu.

Réponse

Formulation du problème : le problème peut être formulé comme suit :

$$\begin{aligned}
&\text{MAX } P(x, y) = 600x + 800y - x^2 - 2y^2 - 2xy \\
&SC: \\
&\text{h(x, y)} = \text{x + y - 500} = 0 \\
&\text{g(x, y)} = \text{x - 350} \leq 0
\end{aligned}$$

C’est un problème d’optimisation non linéaire avec des contraintes d’égalité et d’inégalité :

1. calculer les conditions nécessaires d'optimalité de karush Kuhn et Tucker (KKT)

$$\begin{aligned}
&\text{KKT}(P, \lambda, \mu) = P(x, y) - \lambda.h(x, y) - \mu.g(x, y) \\
&\text{KKT}(P, \lambda, \mu) = 600x + 800y - x^2 - 2y^2 - 2xy - \lambda.(x + y - 500) - \mu.(x - 350)
\end{aligned}$$

- **Stationnarité**

$$\begin{aligned}
&\nabla\text{KKT}(P, \lambda, \mu) = \nabla(600x + 800y - x^2 - 2y^2 - 2xy) - \nabla\lambda.(x + y - 600) - \nabla\mu.(x - 350) \\
&KKTx = 600 - 2x - 2y - \lambda - \mu = 0 \text{...............(1} \\
&KKTy = 800 - 4y - 2x - \lambda = 0 \text{.....................(2} \\
&KKT\lambda = x + y - 600 = 0 \text{...............................(3} \\
&KKT\mu = x - 350 = 0 \text{.....................................(4} \\
&\text{de l'equ 4, x = 350, on remplace x dans les autres équations :} \\
&-100 - 2y - \lambda - \mu = 0 \\
&100 - 4y - \lambda = 0 \\
&y - 150 = 0 \\
&\text{de la dernière equation y = 150, en remplace dans les equations qui restent :} \\
&-450 - \lambda - \mu = 0 \\
&-500 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -500 \\
&\text{on remplace dans la première equation, on trouve :} \\
&\mu = 50 \\
&\text{le point stationaire est (350,150) avec } \lambda = 500, \mu = 50 \\
&\text{verifiant les autres conditions}
\end{aligned}$$

✓

- **Faisabilité principale**

$h(x^*, y^*) = 0 \Rightarrow h(350,150) = 500$ ✓
$g(x^*, y^*) \le 0 \Rightarrow 350 \le 350$

- **Faisabilité Duelle**

$\mu \ge 0 \Rightarrow 50 \ge 0$ ✓

- **Négligence complémentaire**

$\mu . g(x^*, y^*) = \mu .(x^* - 350) = 0$ ✓

Donc les conditions de KKT sont vérifiées alors le point stationnaire **peut être** un maximum, mais il faut vérifier la deuxième condition d'optimalité.

Etude la concavité de la fonction P(x,y)

$p(x, y) = 600x + 800y - x^2 - 2y^2 - 2xy$

$\nabla p(x, y) = (600 - 2x - 2y; \quad 800 - 4y - 2x)$.

$H(x, y) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$; det($H(x, y)$)=4>0 et -2<0 et -4<0, $\forall (x, y)$; $p(x, y)$ est strict. concave.

Le point (350,150) est un maximum absolu du problème d'optimisation sous contraintes car on maximise une fonction concave sous un domaine convexe (contraintes affines).

p = 57500 da

L'interprétation économique que l'on peut donner à λ^* = -500 signifie qu'en ne cultivant pas tous les champs (c.-à-d. ses 500 hectares de champs), le fermier augmenterait ses profits, à cause du signe négatif de λ^*. En effet, lorsque le fermier satisfait les contraintes, ses profits ne sont que de 57500 DA, alors qu'ils sont de 100 000 DA lorsque l'on ne tient pas compte des contraintes (il cultive alors 300 Hectares de champs).