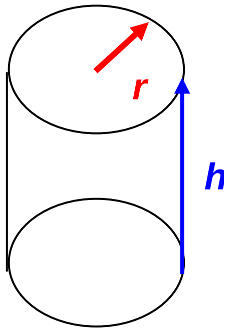
Problème 3 du format d'une boîte de conserve

Lait-de-Constantine est une petite entreprise spécialisée dans les produits laitiers. Elle vient de créer une gamme de soupes à la crème qu'elle désire mettre en marché, dans des boîtes de conserve. Mais elle se demande quel devrait être le format à adopter pour ces boîtes afin d'optimiser cette nouvelle gamme. Le département de la production suggère tout simplement le format de base retrouvé sur le marché, soit des boîtes de 1 L. Mais comme il existe toute une panoplie de dimensions de conserve pouvant satisfaire ce volume fixé, ce département a entrepris une étude sur les coûts de production qui devraient permettre la déduction des dimensions optimales. Ces coûts sont établis comme suit : chaque millilitre de soupe revient à 0,1DA, tandis que les coûts de fabrication de la boîte en tant que tels reviennent à 0,4DA/cm^2 pour les bases de la boîte et à 0,3DA/cm^2 pour la surface latérale de la boîte (incluant le coût de l'étiquette de la compagnie). Trouver les dimensions de la boîte de conserve qui minimisent les coûts. (Note : un cm^3 contient 1 ml.).

Le modèle mathématique



Variables de décision
r = rayon de la boîte de conserve (en cm)
h = hauteur de la boîte de conserve (en cm)

Fonction-objectif :

$$\text{Min } c(r,h) = 0{,}001\pi r^2 h + 0{,}008\pi r^2 + 0{,}006\pi r h$$

Contraintes :

$$\pi r^2 h = 1000$$
$$r > 0, h > 0$$

La solution

On peut utiliser la méthode de substitution ou la méthode du Lagrangien pour résoudre ce problème. Cependant, la preuve d'optimalité s'obtient plus facilement avec la méthode de substitution car la contrainte n'est pas linéaire (domaine non convexe).

Avec la contrainte : $h = \frac{1000}{\pi r^2}$

En remplaçant dans la fonction-objectif, on obtient :

$$\text{Min } c(r) = 0{,}001\pi r^2 \left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) + 0{,}008\pi r^2 + 0{,}006\pi r \left(\frac{1000}{\pi r^2}\right)$$

Après simplifications :

$$\text{Min } c(r) = 1 + 0{,}008\pi r^2 + \frac{6}{r} \quad \text{où } r > 0$$

$$c'(r) = 0{,}016\pi r - \frac{6}{r^2}$$

$$c'(r) = 0 \Rightarrow 0{,}016\pi r - \frac{6}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{6}{0{,}016\pi} \Rightarrow r \approx 4{,}92$$

$$c''(r) = 0{,}016\pi + \frac{12}{r^3} > 0 \quad \forall r > 0$$

$c(r)$ est convexe partout et atteint un minimum absolu en $r \approx 4{,}92$.

La hauteur est : $h = \frac{1000}{\pi(4{,}92)^2} \approx 13{,}13$.

Ainsi, les dimensions optimales sont de 4,92 cm de rayon et de 13,13 cm de hauteur. Le coût total est alors de 2,83DA.

PROBLEME 4 : **Problème du profit généré par une compagne de publicité**

L'entreprise *Lait-de-Constantine* veut allouer un budget de 500 000 DA à la publicité au cours des six prochains mois. Les annonces publicitaires seront présentées dans deux médias : la télévision et les journaux. Les profits générés par cette campagne sont estimés par la fonction suivante :

$$P(x,y) = -x^2 - y^2 + 500x + 1000y$$
$$\text{s.c. } x + y = 500$$

où x = montant investi dans la publicité dans les journaux (**en milliers de DA**) et
y = montant investi dans la publicité à la télévision (**en milliers de DA**).

En considérant que le budget est totalement dépensé, déterminer l'allocation aux deux médias qui permette de maximiser les profits de l'entreprise en utilisant la méthode de substitution et la méthode de Lagrange. Quel est le profit maximum obtenu ? Vérifier que le point stationnaire est un maximum absolu. Interpréter le multiplicateur de Lagrange.

Réponse Méthode de Lagrangien

Le Lagrangien est: $L(x,y,\lambda) = -x^2 - y^2 + 500x + 1000y - \lambda(x + y - 500)$.

Les conditions du premier ordre sont :

$$\left.\begin{aligned} L'_x &= -2x + 500 - \lambda = 0 \\ L'_y &= -2y + 1000 - \lambda = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 500 - 2x = 1000 - 2y \Rightarrow y = 250 + x$$
$$L'_\lambda = -(x + y - 500) = 0 \;\Leftrightarrow x + y - 500 = 0$$

En remplaçant $y = 250 + x$ dans L'_λ, on obtient :

$$x + (250 + x) - 500 = 0 \Rightarrow x^* = 125,\; y^* = 375 \text{ et } \lambda^* = 500 - 2x^* = 250\,.$$

Le domaine est convexe car la contrainte est affine. Il suffit alors de vérifier que $P(x,y)$ est concave pour que (125,375) soit un maximum absolu :

$$\nabla P(x,y) = (-2x + 500, -2y + 1000)$$
$$H(x,y) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{aligned} \det(H(x,y)) &= 4 > 0 \;\; \forall (x,y) \\ P^{(2)}_{xx}(x,y) &= -2 < 0 \;\; \forall (x,y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(x,y) \text{ est strictement concave.}$$

Le point (125,375) est donc un maximum absolu du problème d'optimisation sous contrainte. Il faut investir 125 000DA dans les journaux et 375 000 DA à la télévision afin de maximiser globalement les profits.

L'interprétation économique que l'on peut donner à $\lambda^* = 250$ est que si les dépenses en publicité augmentent de 1000 DA, les profits augmenteront d'environ 250 DA
➔ Ce n'est donc pas rentable.