

# Présentation de la Logique Floue

Frédéric Sur

*sous la direction de Jérôme Lacaille*

Ecole Normale Supérieure de Cachan  
Magistère de Mathématiques  
Mémoire de première année  
Année 1997/1998

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Éléments de théorie des sous-ensembles flous</b>	<b>5</b>
1.1 Généralités . . . . .	5
1.2 Notions caractéristiques . . . . .	5
1.3 Opérations sur les sous-ensembles flous . . . . .	6
1.4 Les $\alpha$ -coupes . . . . .	9
1.5 Normes et co-normes triangulaires . . . . .	9
1.6 Relations floues . . . . .	10
1.7 Quantités floues sur $\mathbb{R}$ . . . . .	12
<b>2 Le raisonnement en logique floue</b>	<b>15</b>
2.1 Les implications floues . . . . .	15
2.2 Les propositions floues . . . . .	16
2.3 Conjonction de propositions floues . . . . .	16
2.4 Deux cas particuliers : les méthodes de Mamdani et de Larsen	17
2.5 Un exemple : le pendule inversé . . . . .	17
<b>3 La défuzzification</b>	<b>23</b>
3.1 La méthode du <i>maximum</i> . . . . .	23
3.2 La méthode du <i>centre de gravité</i> . . . . .	24
<b>4 Une application : estimation de l'objectif d'un missile</b>	<b>25</b>
4.1 Présentation . . . . .	25
4.2 Les données . . . . .	26
4.3 Fuzzification . . . . .	27
4.4 L'algorithme flou et la défuzzification . . . . .	29
4.5 Conclusion . . . . .	30
<b>Conclusion</b>	<b>33</b>

## Introduction

La plupart des problèmes rencontrés sont modélisables mathématiquement. Mais ces modèles nécessitent des hypothèses parfois trop restrictives, rendant délicate l'application au monde réel. Les problèmes du monde réel doivent tenir compte d'informations imprécises, incertaines. Prenons l'exemple d'une climatisation : si on veut obtenir une température *fraîche*, on peut se demander quelle gamme de températures conviendra (la demande est imprécise) ; de plus la fiabilité des capteurs entre en jeu (la mesure de la température ambiante est incertaine). On voit apparaître la difficulté d'interprétation des variables linguistiques comme *frais*, *chaud*, ... ainsi que du traitement de ces données entachées d'incertitude.

Une approche fut développée à partir de 1965 par Lofti A. Zadeh, professeur à l'Université de Californie à Berkeley, basée sur sa théorie des *sous-ensembles flous* (*fuzzy sets* en anglais), généralisant la théorie des ensembles classique. Dans la nouvelle théorie de Zadeh, un élément peut plus ou moins appartenir à un certain ensemble. Les imprécisions et les incertitudes peuvent ainsi être modélisées, et les raisonnements acquièrent une flexibilité que ne permet pas la logique classique : la Logique Floue était née.

De nombreuses applications sont alors développées dans divers domaines, là où aucun modèle déterministe n'existe ou n'est pratiquement implémentable, ainsi que dans des situations pour lesquelles l'imprécision sur les données rend le contrôle par des méthodes classiques impossible.

Dans ce qui suit, on développera d'abord la théorie des sous-ensembles flous, puis on précisera le raisonnement en logique floue, on examinera les méthodes d'exploitation des résultats obtenus, et enfin on verra une application effective.

# 1 Éléments de théorie des sous-ensembles flous

## 1.1 Généralités

DÉFINITION 1 Soit  $X$  un ensemble. Un *sous-ensemble flou*  $A$  de  $X$  est défini par une fonction d'appartenance  $f_A$  sur  $X$  à valeurs dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

*exemple*: une fonction caractéristique possible pour définir le sous-ensemble flou «avoir une vingtaine d'années».

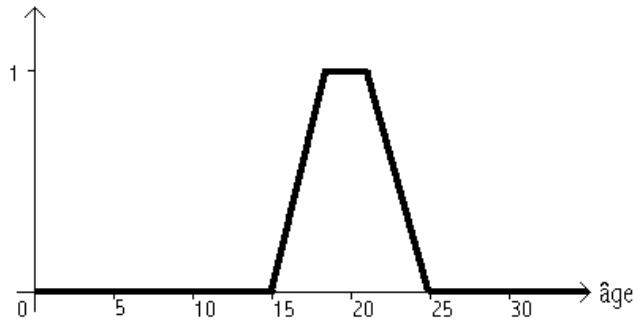


FIG. 1: ...avoir une vingtaine d'années.

On voit ici que la fonction d'appartenance peut être fixée arbitrairement. Un problème des applications pratiques est de définir ces fonctions. On fait généralement appel à des données statistiques ou à l'avis d'un expert.

La notion de sous-ensemble flou englobe celle de sous-ensemble classique pour laquelle  $f_A$  est la fonction indicatrice  $\chi_A$ .

On notera  $\Gamma(X)$  la collection des sous-ensembles flous de  $X$ .

On écrira parfois qu'un élément appartient à un sous-ensemble flou avec un certain *degré*. Il s'agira en fait de la valeur prise par la fonction d'appartenance du sous-ensemble flou au point considéré.

## 1.2 Notions caractéristiques

Soit  $A$  un sous-ensemble flou de  $X$ ,

DÉFINITION 2 Les notions suivantes sont caractéristiques de  $A$  :

- *support* de  $A$  :  $\text{supp } A = \{x \in X, f_A(x) \neq 0\}$ .
- *hauteur* de  $A$  :  $h(A) = \sup_{x \in X} f_A(x)$ ,  
 $A$  est dit *normalisé* si  $h(A) = 1$ .

Les sous-ensembles flous considérés seront tous supposés normalisés *ie* de hauteur égale à 1.

- *noyau* de  $A$  :  $\text{noy } A = \{x \in X, f_A(x) = 1\}$ .
- *cardinalité* :  $|A| = \sum_{x \in X} f_A(x)$ .

*exemple*: avec l'exemple de la page précédente :

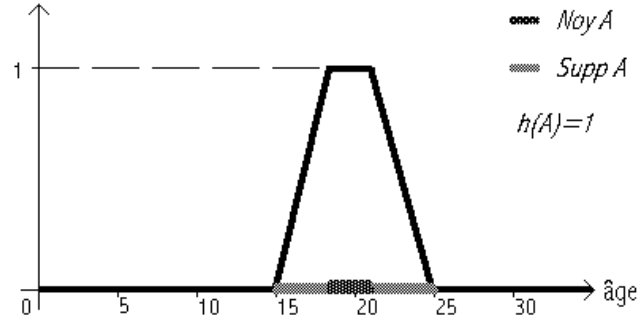


FIG. 2: *notions caractéristiques.*

DÉFINITION 3 Si  $A$  et  $B$  sont deux sous-ensembles flous de l'ensemble  $X$ , on dit que :

1.  $A$  est *plus spécifique* que  $B$  si  $\text{noy } A \subsetneq \text{noy } B$  et  $\text{supp } A \subseteq \text{supp } B$ .
2.  $A$  est *plus précis* que  $B$  si  $\text{noy } A = \text{noy } B$ , et  $\text{supp } A \subsetneq \text{supp } B$ .

*remarque*: si  $A$  est un sous-ensemble de  $X$  au sens classique, alors  $A$  est normalisé,  $A = \text{supp } A$ ,  $A = \text{noy } A$  et  $|A| = \text{card } A$ .

### 1.3 Opérations sur les sous-ensembles flous

On définit en théorie des sous-ensembles flous les mêmes notions qu'en théorie des ensembles classique. Pour deux sous-ensembles flous  $A$  et  $B$  de l'ensemble  $X$  :

DÉFINITION 4 Egalité :  $A = B$  ssi  $\forall x \in X, f_A(x) = f_B(x)$ .

DÉFINITION 5 Inclusion :  $A \subset B$  ssi  $\forall x \in X, f_A(x) \leq f_B(x)$ .

On peut construire par leur fonction d'appartenance :

DÉFINITION 6 Intersection :  $A \cap B$  est défini par :

$$f_{A \cap B} : x \longmapsto \min(f_A(x), f_B(x)).$$

DÉFINITION 7 Union :  $A \cup B$  est défini par :

$$f_{A \cup B} : x \longmapsto \max(f_A(x), f_B(x)).$$

Mais comme on le verra au paragraphe 1.5 page 9, on définit de manière plus générale intersection et union par respectivement une t-norme ou une t-conorme.

*exemple:* reprenons le cas déjà envisagé. On considère les personnes ayant «une vingtaine d'années», et celles «ayant la majorité» (en pointillés sur la figure 3 : on considère un sous-ensemble «non flou»).

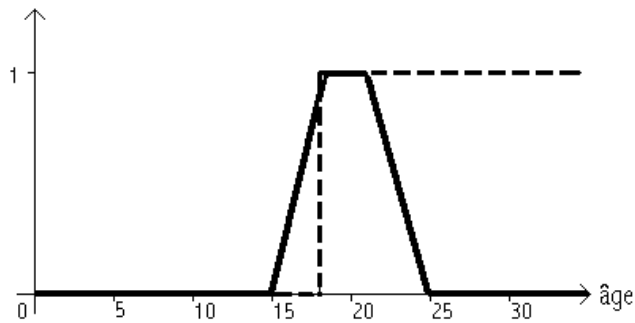


FIG. 3: les deux fonctions d'appartenance considérées.

Selon les définitions 6 et 7, on peut caractériser les sous-ensembles flous correspondant aux personnes «ayant une vingtaine d'années et la majorité» (cf figure 4) ainsi que celui des personnes «ayant une vingtaine d'années ou

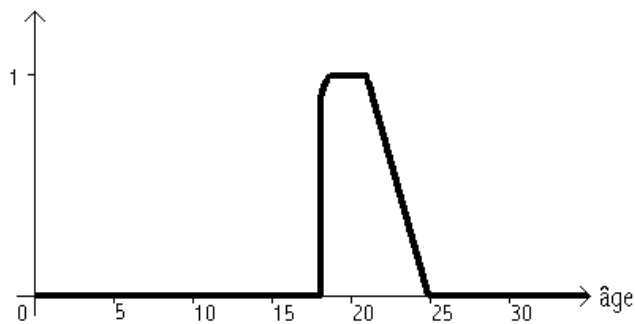


FIG. 4: «ayant une vingtaine d'années et la majorité».

la majorité» (cf figure 5).

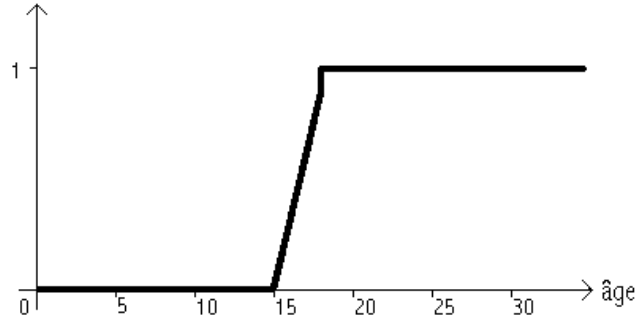


FIG. 5: «*ayant une vingtaine d'années ou la majorité*».

Imaginons que l'on cherche des personnes *ayant une vingtaine d'année et la majorité*. D'après la figure 4 une personne âgée de 23 ans ne conviendra qu'avec un degré d'appartenance égal à 0,5 alors qu'une personne de 20 ans conviendra tout à fait (degré égal à 1).

PROPOSITION 1 Comme en théorie des ensembles classiques, on vérifie que :

- $\cap$  et  $\cup$  sont associatives.
- $\cap$  et  $\cup$  sont commutatives.
- $\cap$  et  $\cup$  sont distributives l'une par rapport à l'autre.
- $A \cup \emptyset = A$  et  $A \cup X = X$ .
- $A \cap X = A$  et  $A \cap \emptyset = \emptyset$ .
- $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ .
- $|A| + |B| = |A \cap B| + |A \cup B|$ .

On définit également le produit cartésien de sous-ensembles flous :

DÉFINITION 8 Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des ensembles, et  $A_1 \in \Gamma(X_1)$ ,  $A_2 \in \Gamma(X_2), \dots, A_n \in \Gamma(X_n)$ , on pose :

$$f_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n} : x \longmapsto \min(f_{A_1}(x), f_{A_2}(x), \dots, f_{A_n}(x)).$$

...ainsi que le complémentaire :

DÉFINITION 9 Le *complémentaire*  $A^C$  d'un sous-ensemble flou  $A \in \Gamma(X)$  est défini par :

$$f_{A^C} : x \longmapsto 1 - f_A(x).$$

PROPOSITION 2 Les propriétés suivantes sont satisfaites :

- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ .

- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ .
- $(A^C)^C = A$ .
- $|A| + |A^C| = |X|$ .

Mais contrairement à la théorie des ensembles :  $A^C \cap A \neq \emptyset$ ,  $A^C \cup A \neq X$ .

## 1.4 Les $\alpha$ -coupes

Soit  $A$  un sous-ensemble flou de  $X$ .

DÉFINITION 10 Une  $\alpha$ -coupe  $A_\alpha$  de  $A$  est un sous-ensemble (au sens classique) de  $X$ , défini par :

$$A_\alpha = \{x \in X, f_A(x) \geq \alpha\},$$

où  $\alpha \in [0, 1]$  est le seuil d'appartenance.

PROPOSITION 3 Les  $\alpha$ -coupes vérifient :

- $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$ .
- $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$ .
- $A \subset B \implies A_\alpha \subset B_\alpha$ .
- $A_1 = \text{noy } A$ .
- $A_0 = X$ .

THÉORÈME 1 On peut décrire le sous-ensemble flou  $A$  à partir de ses  $\alpha$ -coupes de la manière suivante :

$$\forall x \in X, f_A(x) = \sup_{\alpha \in ]0,1]} \alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x).$$

## 1.5 Normes et co-normes triangulaires

DÉFINITION 11 Une *norme triangulaire* (t-norme) est une application  $\top : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$  telle que :

- i)  $\top(x, y) = \top(y, x)$  (commutativité).
- ii)  $\top(x, \top(y, z)) = \top(\top(x, y), z)$  (associativité).
- iii)  $\top(x, y) \leq \top(z, t)$  si  $x \leq z$  et  $y \leq t$  (monotonie).
- iv)  $\top(x, 1) = x$  (1 est élément neutre).

L'opérateur min satisfait ces propriétés.

Toute t-norme est un opérateur d'intersection, ie on peut définir  $A \cap_\top B$  (en accord avec la proposition 1) par sa fonction d'appartenance de la manière suivante :

$$\forall x \in X, f_{A \cap_\top B}(x) = \top(f_A(x), f_B(x)).$$



DÉFINITION 12 Une *conorme triangulaire* (t-conorme) est une application  $\perp : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$  telle que :

- i)  $\perp(x, y) = \perp(y, x)$  (commutativité).
- ii)  $\perp(x, \perp(y, z)) = \perp(\perp(x, y), z)$  (associativité).
- iii)  $\perp(x, y) \leq \perp(z, t)$  si  $x \leq z$  et  $y \leq t$  (monotonie).
- iv)  $\perp(x, 0) = x$  (0 est élément neutre).

L'opérateur max satisfait ces propriétés.

Toute t-conorme est un opérateur d'union, *ie* on peut définir  $A \cup_{\perp} B$  (toujours en accord avec la proposition 1) par sa fonction d'appartenance ainsi :

$$\forall x \in X, f_{A \cup_{\perp} B}(x) = \perp(f_A(x), f_B(x)).$$

PROPOSITION 4 On peut passer d'une t-norme à une t-conorme (et *vice-versa*) par une *négation*  $n : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$  telle que  $n(0) = 1$ ,  $n(1) = 0$ , et  $n(x) \leq n(y)$  si  $x \geq y$ , de la façon suivante :

$$n(\top(x, y)) = \perp(n(x), n(y)).$$

*exemple:* Quelques t-normes et t-conormes associées (pour la négation  $n(x) = 1 - x$ ) :

nom	t-norme	t-conorme
Zadeh	$\min(x, y)$	$\max(x, y)$
probabiliste	$xy$	$x + y - xy$
Lukasiewicz	$\max(x + y - 1, 0)$	$\min(x + y, 1)$
Hamacher	$\frac{xy}{\gamma + (1-\gamma)(x+y-xy)}$	$\frac{x+y-xy-(1-\gamma)xy}{1-(1-\gamma)xy}$
Weber	$\begin{cases} x & \text{si } y = 1 \\ y & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} x & \text{si } y = 0 \\ y & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

où  $\gamma > 0$ .

## 1.6 Relations floues

DÉFINITION 13 Une *relation floue*  $\mathcal{R}$  entre deux ensembles  $X$  et  $Y$  est un sous-ensemble flou de  $X \times Y$ .

*exemple:* la relation floue  $\mathcal{R}$  : «*approximativement égal à*» peut être définie sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  par la fonction d'appartenance :

$$f_{\mathcal{R}}(x, y) = \frac{1}{1 + (x - y)^2}.$$



FIG. 6:  $x$  approximativement égal à 3.

...Comme pour les relations binaires ...

DÉFINITION 14 ...on effectue les opérations :

– inverse  $\mathcal{R}^{-1}$  d'une relation floue  $\mathcal{R}$  entre  $X$  et  $Y$  :

$$\forall (x, y) \in X \times Y, f_{\mathcal{R}^{-1}}(y, x) = f_{\mathcal{R}}(x, y).$$

– composition de deux relations floues  $\mathcal{R}_1$  (entre  $X$  et  $Y$ ) et  $\mathcal{R}_2$  (entre  $Y$  et  $Z$ ) :

$$\forall (x, z) \in X \times Z, f_{\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2}(x, z) = \sup_{y \in Y} \min(f_{\mathcal{R}_1}(x, y), f_{\mathcal{R}_2}(y, z)).$$

*remarque:* cette définition correspond à celle classiquement utilisée, mais on peut remplacer *min* par une t-norme quelconque.

DÉFINITION 15 ...et on dit que la relation floue  $\mathcal{R}$  sur  $X$  est :

- *symétrique* si :  $\forall (x, y) \in X \times X, f_{\mathcal{R}}(x, y) = f_{\mathcal{R}}(y, x),$
- *antisymétrique* si :  $\forall (x, y) \in X \times X, \begin{cases} f_{\mathcal{R}}(x, y) > 0 \\ f_{\mathcal{R}}(y, x) > 0 \end{cases} \implies x = y,$
- *réflexive* si :  $\forall x \in X, f_{\mathcal{R}}(x, x) = 1,$
- *transitive* si :  $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$  ie :  $\forall (x, y) \in X \times X, f_{\mathcal{R} \circ \mathcal{R}}(x, y) \leq f_{\mathcal{R}}(x, y).$

DÉFINITION 16 Une relation d'*ordre flou* est une relation réflexive transitive antisymétrique, et une relation de *similarité* est une relation réflexive transitive symétrique.

## 1.7 Quantités floues sur $\mathbb{R}$

DÉFINITION 17 On dit que  $F$  est un sous-ensemble flou *convexe* de  $\mathbb{R}$  si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall z \in [x, y], f_F(z) \geq \min(f_F(x), f_F(y)).$$

PROPOSITION 5 Le sous-ensemble flou  $F$  est convexe si et seulement si toute  $\alpha$ -coupe de  $F$  est une partie convexe de  $\mathbb{R}$ .

DÉFINITION 18 On appelle les sous-ensembles flous normalisés  $Q$  des *quantités floues*.

DÉFINITION 19 Si  $m \in \mathbb{R}$  est tel que  $f_Q(m) = 1$ ,  $m$  est une *valeur modale* de la quantité floue  $Q$ .

DÉFINITION 20 Un *intervalle flou* de  $\mathbb{R}$  est une quantité floue convexe de  $\mathbb{R}$ . Un *nombre flou* est un intervalle flou, de fonction d'appartenance semi-continue supérieurement et à support compact, admettant une seule valeur modale.

DÉFINITION 21 Opérations arithmétiques sur les quantités floues :

- opération unaire  $\Delta$  sur les quantités floues à partir d'une opération unaire  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}$  :

$$\forall z \in \mathbb{R}, f_{\Delta Q}(z) = \sup_{\{x \in \mathbb{R}, z = \varphi(x)\}} f_Q(x)$$

- opération binaire  $\star$  sur les quantités floues à partir d'une opération binaire  $\psi$  sur  $\mathbb{R}$  :

$$\forall z \in \mathbb{R}, f_{Q \star Q'}(z) = \sup_{\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, z = x \psi y\}} \min(f_Q(x), f_{Q'}(y))$$

*exemple:* On peut, avec ce qu'on a introduit, sommer ou multiplier des nombres réels connus approximativement. Ce peut être un cadre pratique pour le calcul d'incertitudes.

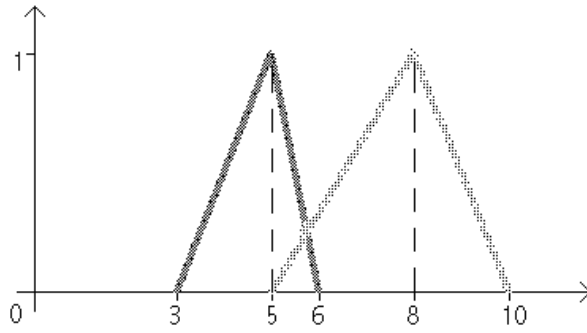


FIG. 7: deux nombres flous.

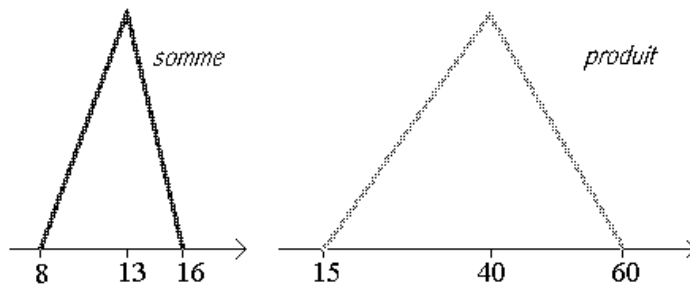


FIG. 8: leur somme et leur produit.

## 2 Le raisonnement en logique floue

### 2.1 Les implications floues

DÉFINITION 22 Une implication floue est une relation  $\mathcal{R}$  entre les deux ensembles  $X$  et  $Y$  quantifiant le degré de vérité de la proposition :

$$\text{SI } (x \in A) \text{ ALORS } (y \in B),$$

où  $A$  et  $B$  sont des sous-ensembles flous de  $X$  et  $Y$  respectivement.

La fonction d'appartenance  $f_{\mathcal{R}}$  de cette relation dépend des fonctions d'appartenance  $f_A$  et  $f_B$  de  $A$  et  $B$ .

En logique classique  $f_A$  et  $f_B$  ne prennent que les valeurs 0 ou 1, et  $f_{\mathcal{R}}$  est définie par :

$f_A(x)$	$f_B(y)$	$f_{\mathcal{R}}(x, y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

En logique floue, on peut définir plusieurs implications. On a regroupé les principales sur le tableau suivant.

Valeur de vérité	Nom	
$f_{\mathcal{R}_R}(x, y)$	$1 - f_A(x) + f_A(x)f_B(y)$	Reichenbach
$f_{\mathcal{R}_W}(x, y)$	$\max(1 - f_A(x), \min(f_A(x), f_B(y)))$	Willmott
$f_{\mathcal{R}_{RG}}(x, y)$	$\begin{cases} 1 & \text{si } f_A(x) \leq f_B(y) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	Rescher-Gaines
$f_{\mathcal{R}_{KD}}(x, y)$	$\max(1 - f_A(x), f_B(y))$	Kleene-Dienes
$f_{\mathcal{R}_{BG}}(x, y)$	$\begin{cases} 1 & \text{si } f_A(x) \leq f_B(y) \\ f_B(y) & \text{sinon} \end{cases}$	Brouwer-Gödel
$f_{\mathcal{R}_G}(x, y)$	$\begin{cases} \min(\frac{f_B(y)}{f_A(x)}, 1) & \text{si } f_A(x) \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$	Goguen
$f_{\mathcal{R}_L}(x, y)$	$\min(1 - f_A(x) + f_B(y), 1)$	Lukasiewicz
$f_{\mathcal{R}_M}(x, y)$	$\min(f_A(x), f_B(y))$	Mamdani
$f_{\mathcal{R}_P}(x, y)$	$f_A(x)f_B(y)$	Larsen

Les deux dernières implications floues (Mamdani et Larsen) ne généralisent pas l'implication classique, alors que c'est le cas des autres. Elles sont néanmoins les plus utilisées dans les commandes floues, comme on le verra plus loin.

## 2.2 Les propositions floues

Comme en logique classique, on peut effectuer des raisonnements sur les sous-ensembles flous, par exemple un raisonnement du type :

$$\text{SI } (x \in A) \text{ ET } (y \in B) \text{ ALORS } (z \in C),$$

où  $A, B, C$  sont des sous-ensembles flous.

En logique classique, ce peut être :

$$\text{SI } (x > 5) \text{ ET } (y > 7) \text{ ALORS } (xy > 35).$$

En logique floue, on aura une règle du genre :

$$\text{SI (vitesse est grande) ET (obstacle est proche) ALORS} \\ \text{(freinage est fort)}.$$

Tout le problème réside dans la détermination du sous-ensemble flou des  $z$  satisfaisant l'implication, connaissant  $x, y$  et les fonctions d'appartenance de  $A, B$ , et  $C$ . Le sous-ensemble des solutions est flou car un  $z$  donné réalise l'implication avec un degré plus ou moins grand.

**DÉFINITION 23** Le sous-ensemble flou solution  $S$  a pour fonction d'appartenance :

$$f_S(z) = f_{\mathcal{R}}((f_A(x) \star f_B(y)), f_C(z)),$$

où  $f_{\mathcal{R}}$  est la fonction d'appartenance d'une relation d'implication floue, et  $\star$  une norme triangulaire (c'est un opérateur de conjonction traduisant le **ET**).

## 2.3 Conjonction de propositions floues

Le contrôle d'un processus par commande floue nécessite de considérer les différentes valeurs possibles pour les variables d'entrée, et donc différentes règles pour chaque situation envisagée. Ainsi, on considère un ensemble de propositions floues, du genre :

$$\left| \begin{array}{ll} \text{SI } (x \in A_1) \text{ ET } (y \in B_1) \text{ ALORS } (z \in C_1) & P_1 \\ \text{SI } (x \in A_2) \text{ ET } (y \in B_2) \text{ ALORS } (z \in C_2) & P_2 \\ \dots & \\ \text{SI } (x \in A_n) \text{ ET } (y \in B_n) \text{ ALORS } (z \in C_n) & P_n \end{array} \right. .$$

Pour déterminer le sous-ensemble flou solution de la conjonction des  $n$  propositions, il faut utiliser un opérateur d'*agrégation*  $\bigwedge$  permettant de faire la synthèse des solutions de chaque  $P_i$ .

**DÉFINITION 24** Le sous-ensemble flou  $S$  des solutions du système de propositions floues est défini par la fonction d'appartenance :

$$f_S(z) = \bigwedge (f_{S_1}(z), f_{S_2}(z), \dots, f_{S_n}(z)).$$

Comme on le verra dans l'exemple 2.5, les règles qui ne sont pas concernées par l'observation (c'est à dire la  $j^{\text{ème}}$  proposition si  $f_{A_j}(x) = f_{B_j}(y) = 0$ ) ne doivent pas intervenir dans la synthèse.

Or :  $f_{A_j}(x) = f_{B_j}(y) = 0$  implique :  $f_{A_j}(x) \star f_{B_j}(y) = 0$  et donc :  $f_{S_j}(z) = f_{\mathcal{R}}(0, f_{C_j}(z))$ . Ainsi si  $\mathcal{R}$  est l'implication de Mamdani ou de Larsen,  $f_{S_j}(z) = 0$ , et dans les autres cas  $f_{S_j}(z) = 1$ . Il convient alors d'utiliser comme opérateur d'agrégation  $\bigwedge$  un opérateur admettant 0 comme élément neutre dans le premier cas et 1 dans les autres.

On peut utiliser respectivement les opérateurs max et min.

## 2.4 Deux cas particuliers : les méthodes de Mamdani et de Larsen

Examinons deux possibilités de choix pour  $\mathcal{R}$ ,  $\star$ , et  $\bigwedge$ .

méthode de :	Mamdani	Larsen
implication floue $\mathcal{R}$	$\mathcal{R}_M$	$\mathcal{R}_L$
opérateur de conjonction $\star$	minimum	produit
opérateur d'agrégation $\bigwedge$	maximum	maximum

*remarque:* la méthode de Mamdani est aussi appelée méthode *min-max*.

Avec ces définitions la fonction d'appartenance du sous-ensemble flou des solutions de la proposition  $P_i$  :

$$\text{SI } (x \in A_i) \text{ ET } (y \in B_i) \text{ ALORS } (z \in C_i)$$

est :

**Mamdani :**  $f_{S_i}(z) = \min(\min(f_{A_i}(x), f_{B_i}(y)), f_{C_i}(z))$

**Larsen :**  $f_{S_i}(z) = (f_{A_i}(x)f_{B_i}(y))f_{C_i}(z)$

et dans les deux cas les solutions sont agrégées par  $\bigwedge = \max$ , i.e le sous-ensemble flou  $S$  solution du système des  $n$  propositions a pour fonction d'appartenance :

$$f_S(z) = \max(f_{S_1}(z), f_{S_2}(z), \dots, f_{S_n}(z)),$$

où si  $1 \leq i \leq n$ ,  $S_i$  est le sous-ensemble flou solution de la proposition  $P_i$ .

## 2.5 Un exemple : le pendule inversé

On va étudier un processus de commande floue permettant de maintenir en position verticale un «pendule inversé» : une barre placée sur un chariot mobile pouvant être déplacé dans deux directions (cf figure 9 page suivante). L'axe de rotation de la barre est solidaire du chariot.

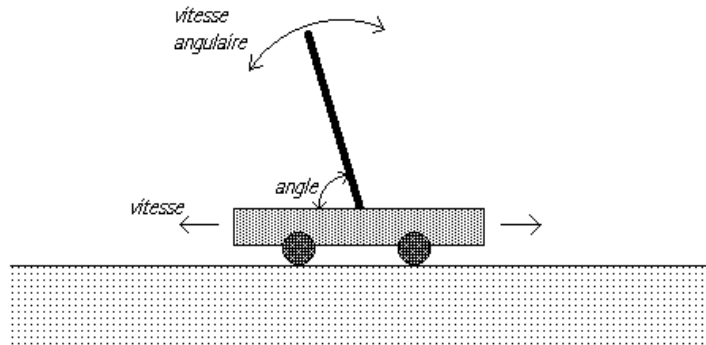


FIG. 9: *le pendule inversé.*

Ce processus de commande s'effectue en temps réel : on mesure la vitesse angulaire ainsi que l'angle d'inclinaison de la barre, et on calcule à chaque instant la vitesse devant être appliquée au chariot pour «rattraper» le mouvement de rotation de la barre et la maintenir dans la position la plus verticale possible.

On suppose que l'on peut qualifier la vitesse angulaire et l'angle d'inclinaison de la barre ainsi que la vitesse du chariot par :

**NG** : Négatif Grand

**NF** : Négatif Faible

**Z** : Zéro

**PF** : Positif Faible

**PG** : Positif Grand.

On utilise les fonctions d'appartenance de la figure 10

Considérons par exemple que la barre est en position verticale et que sa vitesse angulaire est «faible», dans le sens + (sens inverse de celui des aiguilles d'une montre). On doit alors compenser le mouvement de la barre en déplaçant le chariot dans la direction + (vers la gauche) à une vitesse «faible».

D'où la règle floue :

SI (angle est zéro) ET (vitesse angulaire est positive faible)  
ALORS (vitesse est positive faible).

On établit ainsi les règles de contrôle du mobile, que l'on peut résumer dans le tableau suivant :



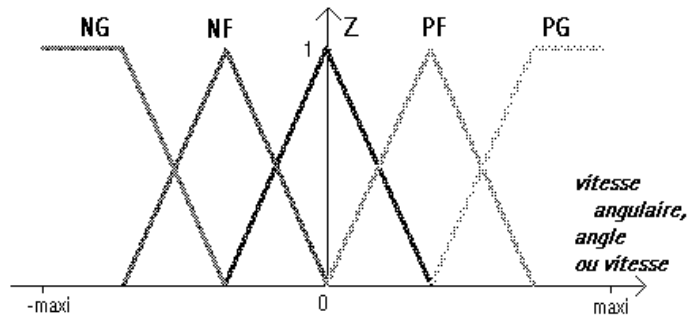


FIG. 10: les fonctions d'appartenance.

		angle				
		NG	NF	Z	PF	PG
v a n t e u s l	NG			NG		
	NF			NF	Z	
	Z	NG	NF	Z	PF	PG
	PF		Z	PF		
	PG			PG		

On utilisera la méthode min-max.

Prenons un cas particulier : soit comme valeur d'angle celle de la figure 11 et comme valeur de vitesse angulaire celle de la figure 12.

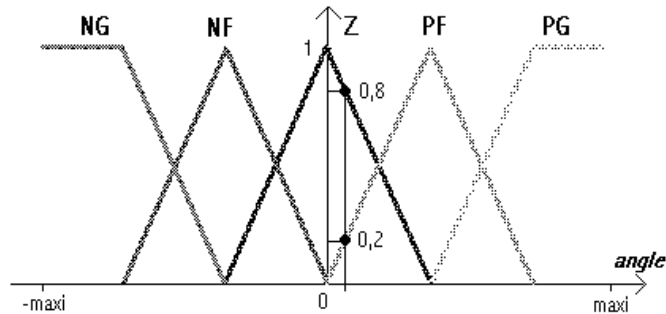


FIG. 11: une valeur d'angle.

Comme on le lit sur les graphes, l'angle considéré est zéro (Z) avec le degré 0,8 et est positif faible (PF) avec le degré 0,2. En ce qui concerne la vitesse angulaire, elle est zéro (Z) avec un degré de 0,3 et est négative faible (NF) avec un degré de 0,7.

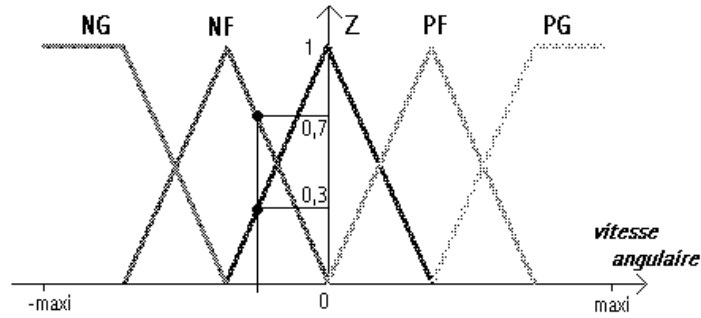


FIG. 12: *une valeur de vitesse angulaire.*

Rappelons que le degré de vérité de l'implication floue :

$$\text{SI } (x \in A) \text{ ET } (y \in B) \text{ ALORS } (z \in C)$$

où  $x$  est la valeur mesurée de l'angle entre la barre et l'horizontale,  $y$  celle de la vitesse angulaire de rotation de la barre, et  $z$  une vitesse pouvant être appliquée est :

$$f_S(z) = \min(\min(f_A(x), f_B(y)), f_C(z)),$$

On applique les quatre règles concernées :

1. SI (angle Z) ET (vitesse angulaire Z) ALORS (vitesse Z).

L'angle est zéro avec un degré de 0,8 et la vitesse angulaire est zéro avec un degré de 0,3. On déduit la fonction membre des vitesses solutions de l'implication floue sur la figure 13 ( $\min(0,8; 0,3) = 0,3$ ).

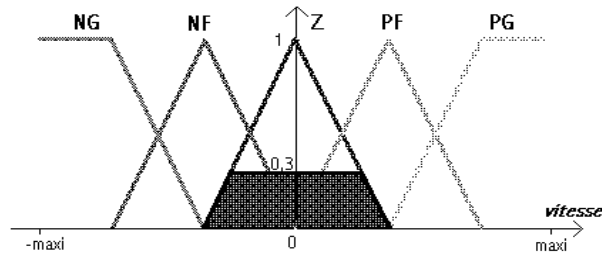


FIG. 13: *solution de la première règle floue.*

2. SI (angle Z) ET (vitesse angulaire NF) alors (vitesse NF).  
 L'angle est zéro avec un degré de 0,8 et la vitesse angulaire est négative faible avec un degré de 0,7. On déduit la fonction membre des vitesses solutions sur la figure 14 ( $\min(0,8;0,7) = 0,7$ ).

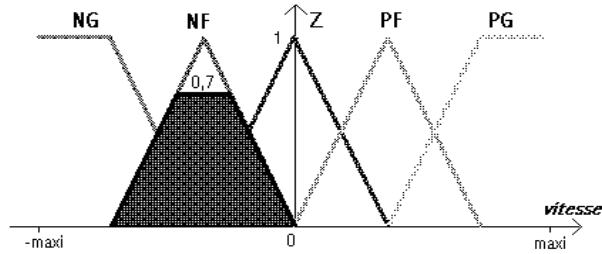


FIG. 14: *solution de la deuxième règle floue.*

3. SI (angle PF) ET (vitesse angulaire NF) alors (vitesse Z).  
 L'angle est positif faible avec un degré de 0,2 et la vitesse angulaire est négative faible avec un degré de 0,7. On déduit la fonction membre des vitesses solutions sur la figure 15 ( $\min(0,2;0,7) = 0,2$ ).

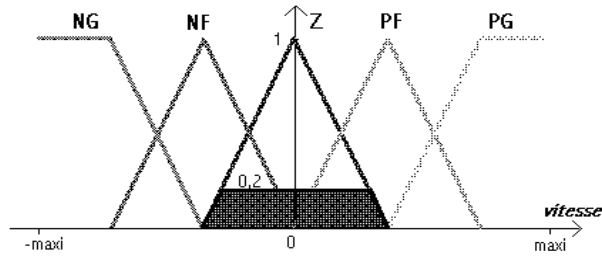


FIG. 15: *solution de la troisième règle floue.*

4. SI (angle PF) ET (vitesse angulaire Z) alors (vitesse PF).  
 L'angle est positif faible avec un degré de 0,2 et la vitesse angulaire est zéro avec un degré de 0,3. On déduit la fonction membre des vitesses solutions sur la figure 16 ( $\min(0,2;0,3) = 0,2$ ).

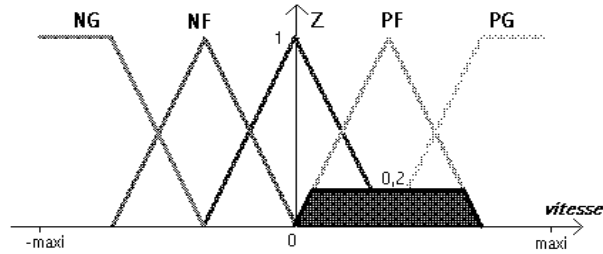


FIG. 16: *solution de la quatrième règle floue.*

Maintenant que l'on a déterminé les fonctions d'appartenance du sous-ensemble flou solution de chaque règle, on détermine le sous-ensemble solution du système en agrégeant les résultats, avec l'opérateur max (cf figure 17).

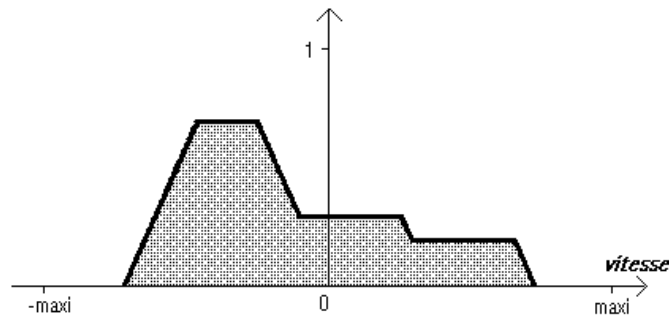


FIG. 17: *la fonction d'appartenance des solutions.*

On a donc obtenu le sous-ensemble flou solution : pour une vitesse donnée, on sait à quel degré elle satisfait les règles de la commande. Mais pour utiliser pratiquement ce résultat, il faut donner une valeur numérique comme solution : de l'exploitation de la figure 17 on déduit une valeur de vitesse devant être donnée au chariot pour qu'il puisse «rattraper» la rotation de la barre. Cette étape est la *défuzzification*, elle fait l'objet de la partie suivante.

### 3 La défuzzification

Le processus de commande floue doit fournir une solution numérique pour être exploitable. Par exemple pour un processus de contrôle, l'organe de commande nécessite un signal d'entrée précis. Il reste donc une étape : l'interprétation du sous-ensemble flou des solutions, la *défuzzification*.

Plusieurs possibilités existent, mais il semble qu'on ne puisse pas déterminer de manière systématique la meilleure méthode de défuzzification. Par ailleurs, la rapidité de l'algorithme de défuzzification est cruciale pour un contrôle en temps réel.

Détaillons deux méthodes.

#### 3.1 La méthode du *maximum*

Elle consiste à choisir comme solution défuzzifiée l'abscisse du maximum de la fonction d'appartenance des solutions.

Si plusieurs points conviennent, on peut par exemple utiliser une variante, la méthode de la *moyenne des maxima*, qui consiste à prendre comme solution la moyenne des abscisses des maxima.

Dans notre cas :

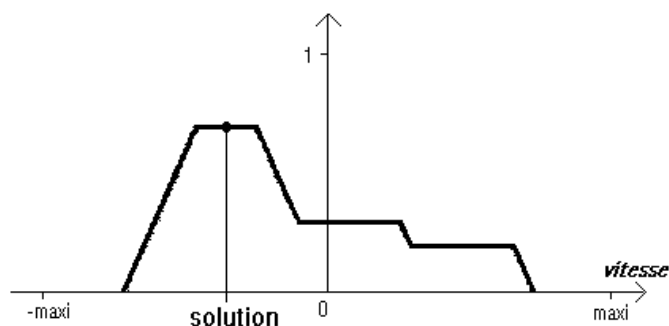


FIG. 18: *méthode du maximum*.

L'avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas une grande puissance de calcul. Cependant, elle présente un gros inconvénient : de faibles variations du sous-ensemble flou solution peuvent entraîner des sauts importants du signal de sortie, comme l'illustre la figure 19. Ceci est particulièrement gênant si le signal défuzzifié alimente un organe de contrôle nécessitant un signal régulier.

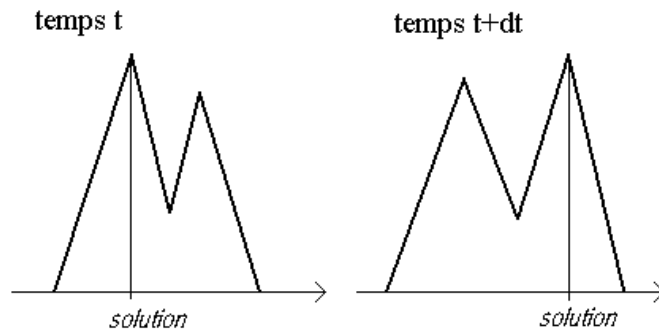


FIG. 19: *inconvenient de la méthode du maximum.*

### 3.2 La méthode du *centre de gravité*

Cette méthode est la plus souvent utilisée et donne généralement les meilleurs résultats. Elle consiste à prendre comme solution l'abscisse du centre de gravité des solutions.

Pour le pendule inversé :

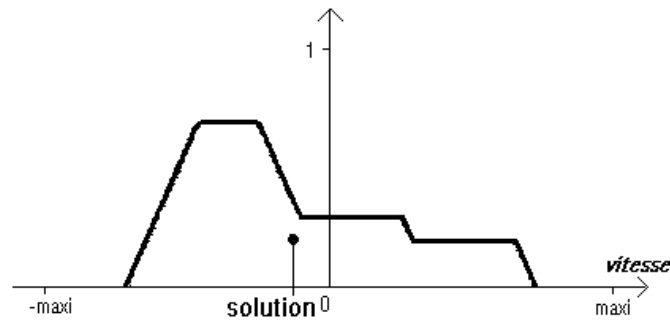


FIG. 20: *méthode du centre de gravité.*

Par comparaison avec la méthode du maximum, les résultats fournis sont bien plus stables vis-à-vis de variations minimales du sous-ensemble flou solution. Mais en contrepartie, elle exige une plus grande puissance de calcul.

## 4 Une application : estimation de l'objectif d'un missile

On présentera dans cette partie un exemple d'algorithme flou d'aide à la prise de décision. Le problème est d'estimer le plus tôt possible la cible d'un missile autoguidé en déplacement dans la direction de plusieurs objectifs potentiels. Cette partie repose sur les travaux de V.Boulet, E. Druon, D. Willaeyts et P. Vanheege [5].

### 4.1 Présentation

On suppose que le missile a un objectif prédéfini qu'il cherche à atteindre par la méthode de Navigation Proportionnelle (que l'on ne détaillera pas). On suppose également les vitesses des différents objets considérés constantes en module, et les vitesses des cibles faibles devant celle du missile. Les paramètres de la trajectoire de ce dernier sont fournis par des capteurs dont les mesures sont entachées de bruit.

Définissons brièvement les paramètres de la Navigation Proportionnelle :

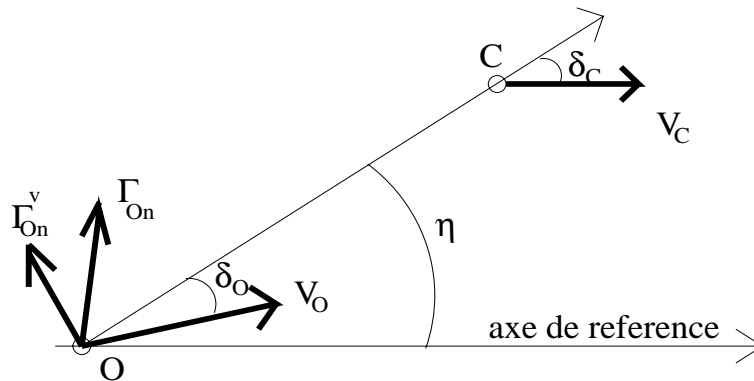


FIG. 21: paramètres de la Navigation Proportionnelle.

O : mobile.

C : cible considérée.

$\delta_O$  : angle entre  $\mathbf{V}_O$  et  $\mathbf{OC}$ .

$\delta_C$  : angle entre  $\mathbf{V}_C$  et  $\mathbf{OC}$ .

$r$  : distance entre O et C.

$\eta$  : angle entre l'axe de référence et  $\mathbf{OC}$ .

$\mathbf{\Gamma}_{O_n}$  : accélération normale du mobile O.

$\Gamma_{O_n}^v$  : projection de  $\Gamma_{O_n}$  sur la normale à  $\mathbf{OC}$ .

$A$  : constante de la Navigation Proportionnelle.

Les équations cinématiques du mobile  $O$  contrôlé par Navigation Proportionnelle et dirigé vers  $C$  sont :

$$\dot{r} = V_C \cos \delta_C - V_0 \cos \delta_O = -V_r, \quad (1)$$

$$r\dot{\eta} = -V_C \sin \delta_C + V_0 \sin \delta_O, \quad (2)$$

$$d\delta_O = (1 - A)d\delta_C, \quad (3)$$

$$\Gamma_C - \Gamma_0 = (\ddot{r} - r\dot{\eta}^2)\mathbf{u} + (r\ddot{\eta} + 2\dot{r}\dot{\eta})\mathbf{v}. \quad (4)$$

Des capteurs fournissent les valeurs de  $r$ ,  $\eta$ ,  $\Gamma_{O_n}^v$  avec des périodes de temps  $\Delta t$ .

On définit une «variable de danger» pour chaque cible estimant la possibilité d'être la cible réelle du missile ; c'est cette variable qui sera modifiée par l'algorithme flou.

## 4.2 Les données

### 1. Données géométriques

On remarque que pour un mobile commandé par Navigation Proportionnelle,  $\delta_O$  converge vers 0 si la cible considérée est la cible réelle, et diverge sinon.

On calcule donc pour chaque objectif potentiel la valeur de  $\delta_O$  à partir de celles de  $r$  et  $\eta$ .

### 2. Données cinématiques

On estime pour chaque cible possible deux intervalles  $[\hat{r}_1, \hat{r}_2]$  et  $[\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2]$  dans lesquels  $r$  et  $\eta$  devraient se trouver à l'instant  $t + n\Delta t$  si la cible considérée est la cible réelle du missile ( $n$  est fixé à l'avance). Pour  $i = 1$  ou  $i = 2$ , on estime  $\hat{r}_i$  et  $\hat{\eta}_i$  en résolvant les équations (1),(2), et (3) pour  $A = \alpha_i$  (on ne connaît pas la véritable valeur de  $A$ ), et on diminue ( $i = 1$ ) ou on augmente ( $i = 2$ ) le résultat pour tenir compte du bruit sur les mesures.

Pour la véritable cible,  $r$  et  $\eta$  auront tendance à rester dans respectivement  $[\hat{r}_1, \hat{r}_2]$  et  $[\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2]$  alors que pour les autres cibles,  $r$  et  $\eta$  sortiront de ces intervalles.

### 3. Contrôle optimal

On ne connaît pas les paramètres du mouvement du missile. Mais dans le cadre optimal pour la méthode de Navigation Proportionnelle,  $A$



vaut 3 : on calcule pour chaque cible  $m$  l'accélération normale  $\widehat{u}_m$  du mobile si son paramètre était 3 et si la cible était réellement  $m$ . On ne détaillera pas le calcul ici mais avec l'équation (3), on déduit :

$$\Gamma_{O_n}^v = A \cdot V_r \cdot \eta_0 \cdot \left( \frac{t_f - t}{t_f} \right)^{A-2}.$$

Si  $A > 2$ , ce que l'on supposera,  $\Gamma_{O_n}^v$  décroît vers 0. En particulier,  $\widehat{u}_m$  également (car  $A = 3$ ).

Pour améliorer la vitesse de convergence, on étudie l'écart à l'idéal :  $c_m = \Gamma_{O_n}^v - \widehat{u}_m$ . Si  $m$  est la cible réelle,  $c_m$  tend vers 0 et sinon  $c_m$  diverge.

### 4.3 Fuzzification

1. Pour  $\delta_O$  et  $c_m$

On examine à la fois  $c_m$  et  $\delta_O$  pour accélérer l'estimation,

Pour  $\delta_O(t=0) > 0$ , prenons pour fonctions d'appartenance les fonctions de la figure 22.

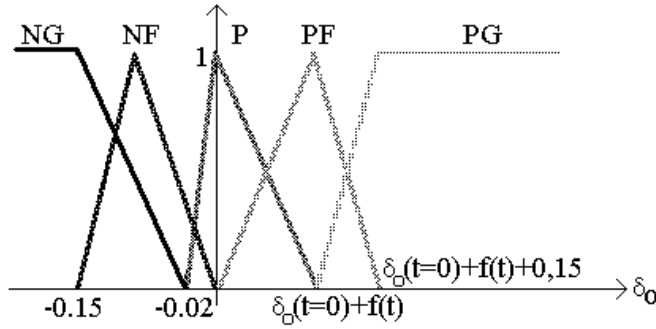


FIG. 22: fonctions d'appartenance pour  $\delta_O$ .

avec :

**NG** : Négatif Grand

**NF** : Négatif Faible

**Z** : Zéro

**PF** : Positif Faible

**PG** : Positif Grand.

La fonction  $f$  est une fonction décroissante ayant 0 pour limite : elle permet d'éliminer plus rapidement les cibles pour lesquelles le graphe de  $\delta_O$  est du type de celui de la figure 23.

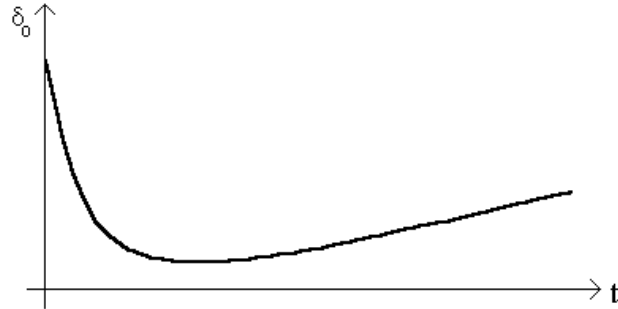


FIG. 23: cas particulier pour  $\delta_O$ .

Si  $\delta_O(t = 0) < 0$ , on symétrise les fonctions d'appartenance précédentes. D'autre part, on prend le même type de fonctions membres pour  $c_m$ .

2. Pour  $r$  et  $\eta$

Rappelons qu'il s'agit de savoir si  $r$  et  $\eta$  appartiennent respectivement aux intervalles  $[\hat{r}_1, \hat{r}_2]$  et  $[\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2]$ .

Le bruit entachant les mesures d'incertitudes, les fonctions d'appartenance ne peuvent être très « précises » (cf figure 24).

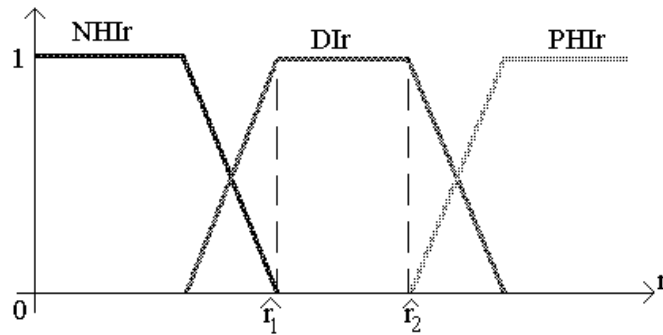


FIG. 24: fonctions d'appartenance pour  $r$ .

On choisit comme qualificatifs pour  $r$  :

**NHr** : Négativement Hors Intervalle

**DIr** : Dans l'Intervalle

**PHr** : Positivement Hors Intervalle.

De la même façon on définit les fonctions d'appartenance relatives à  $\eta$ .

#### 4.4 L'algorithme flou et la défuzzification

Les règles floues augmentent ou diminuent la valeur de la variable «niveau de danger» attribuée à chaque objectif potentiel. On représente cette variation par les variables floues  $\Delta danger_m$ ,  $m$  indiquant l'objectif considéré.

On associe à  $\Delta danger_m$  les sous-ensembles flous de la figure 25.

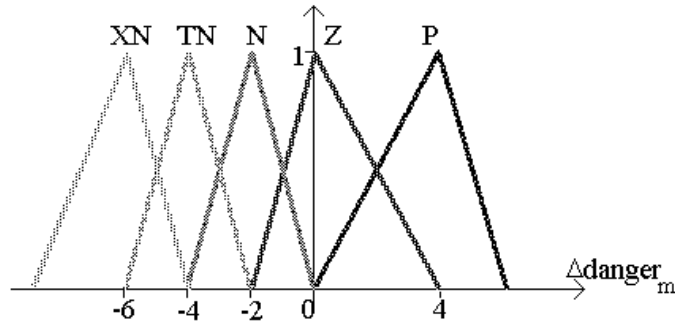


FIG. 25: fonctions d'appartenance pour  $\Delta danger_m$ .

avec :

**P** : Variation Positive

**Z** : Variation Nulle

**N** : Variation Négative

**TN** : Variation Très Négative

**XN** : Variation Extrêmement Négative.

L'algorithme comporte deux ensembles de règles fixant  $\Delta danger_m$  à partir, d'une part, de  $c_m$  et  $\delta_O \dots$

$c_m \setminus \delta_O$	NG	NF	P	PF	PG
NG	XN	XN	TN	TN	XN
NF	XN	Z	N	N	TN
P	TN	N	P	Z	TN
PF	TN	N	Z	Z	N
PG	XN	TN	TN	XN	XN

...et d'autre part, de  $r$  et  $\eta$ .

$r \setminus \eta$	NHI $\eta$	DI $\eta$	PHI $\eta$
NHI $r$	XN	Z	XN
DI $r$	Z	Z	Z
PHI $r$	XN	Z	XN

*remarque:* les variables  $r$  et  $\eta$  ne sont en fait utilisés que pour accentuer le rejet d'une cible.

Pour l'obtention des résultats, on utilise la méthode *min-max* et la méthode du centre de gravité pour la défuzzification ; on obtient alors une valeur numérique pour  $\Delta\text{danger}_m$ .

La cible  $m$  aura d'autant plus de chances d'être la cible réelle que la variable  $\Delta\text{danger}_m$  sera grande.

## 4.5 Conclusion

Simple à mettre en œuvre, cette méthode permet néanmoins d'identifier rapidement la cible réelle.

Considérons le scénario suivant (cf figure 26) :

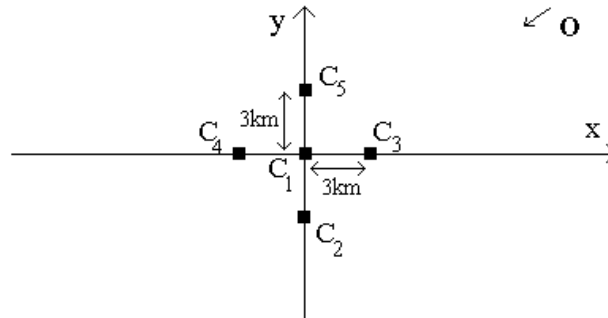


FIG. 26: *une simulation.*

- cinq cibles potentielles:  $C_i$ , pour  $1 \leq i \leq 5$ , disposées selon une croix de demi-côté 3 km.
- vitesse des cibles : 15 m/s selon l'axe (Ox).
- vitesse du missile : 800 m/s.
- missile  $O$  partant de 15 km de sa cible réelle ( $C_1$ ).
- on choisit  $\alpha_1 = 2$  et  $\alpha_2 = 7$  (cf les données cinématiques dans 4.2).

On simule par ordinateur les mouvements en résolvant les équations différentielles de la cinématique (par une méthode type Runge-Kutta), et les bruits de manière aléatoire.

L'application de l'algorithme montre une reconnaissance de l'objectif réel (c'est-à-dire une variable de danger significativement plus grande pour la cible  $C_1$  que pour les autres) dès que la distance entre le missile et  $C_1$  est de l'ordre de 11 km, soit après un parcours d'approximativement 4 km seulement.

## Conclusion

Les outils fournis par la logique floue permettent une modélisation des phénomènes pouvant en un certain sens s'approcher du raisonnement humain. Le fait de transcender le «tout ou rien» des ordinateurs introduit une souplesse faisant la puissance des outils flous dans de nombreux domaines.

Au milieu des années 80, les applications industrielles firent florès de manière spectaculaire, et ce essentiellement en Asie du Sud-Est, l'Europe et l'Amérique restant assez circonspectes sur le sujet. Elles vont du contrôle d'un métro automatique à l'élimination du tremblement pour les caméras vidéo en passant par le réglage de cycles sur une machine à laver. En outre, la flexibilité des modèles flous permet également des applications dans des domaines tels que la médecine (aide au diagnostic), la finance (prévisions boursières, opérations de change), la météorologie, etc.

Mais même s'ils bénéficièrent d'un effet de mode, les algorithmes flous ne sont pas nécessairement les meilleurs. D'autres méthodes (par exemple les méthodes neuronales) peuvent les surpasser pour la résolution de problèmes du même type. En fait, on s'oriente vers un panachage de ces techniques, et c'est ainsi que l'on assiste à l'apparition d'algorithmes «neuro-flous».

D'autre part, plus le système est complexe, plus les règles qui le régissent sont nombreuses et compliquées. Il s'agit là d'un obstacle majeur au contrôle en temps réel. Des équipes au Japon s'attachent à réduire la complexité des algorithmes flous ; un objectif de la recherche est de parvenir au contrôle d'un hélicoptère sans pilote humain, tâche complexe s'il en est !

Citons pour finir quelques projets «flous» : la reconnaissance de motifs sur des images, l'élaboration de robots intelligents qui, une fois certains travaux assimilés, pourraient travailler en équipe, la mise au point de processeurs travaillant directement sur des variables linguistiques et non plus sur des variables booléennes ...

## Références

- [1] Bernadette Bouchon-Meunier, *La logique floue*, PUF collection «Que sais-je?» 2702, 1994.
- [2] Bernadette Bouchon-Meunier, *La logique floue et ses applications*, Addison Wesley France, 1995.
- [3] Jean-Raphaël Tong-Tong, *La logique floue*, Hermès, 1995.
- [4] Hansruedi Bühler, *Réglage par logique floue*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1994.
- [5] V.Boulet, E.Druon, D.Willaeys et P. Vanheege, *Target estimation using fuzzy logic*, in *Proceedings of 1993 IEEE Systems, Man and Cybernetics Conference*.  
...ainsi que les nombreuses pages Web sur le sujet.