Petit précis de logique formelle

Cours donné à Neuchâtel 2003-04

Henri Volken
Institut de Mathématiques Appliquées
Université de Lausanne

Ce petit précis ne constitue pas un cours véritable, le traitement du sujet y est trop elliptique. Mais il contient toutes les définitions et tous les résultats importants abordés dans le cours de logique durant le semestre d'hiver 2003-04 à la Faculté des Sciences de l'Université de Neuchâtel. On y trouvera le découpage classique en logique des propositions et logique des prédicats. La démarche possède une couleur un peu particulière par l'emploi abondant de la structure d'arbre : arbre structurel, arbre de Quine, arbre de preuve par exemple. Pour l'aspect syntaxique, les séquents de Gentzen complètent l'approche par les arbres de preuve en fournissant un autre éclairage de la même réalité.

L'utilité d'un tel précis ne peut résider que dans sa fonction de plan détaillé et raisonné. Il ne remplace en aucune façon un enseignement interactif et vivant, ou un manuel explicite. Par contre, il peut contribuer à structurer la mémoire de quelqu'un qui aurait suivi un cours d'introduction à la logique, ou qui aurait pris la peine de parcourir l'un des nombreux ouvrages qui proposent une initiation à ce monde fascinant que constitue la logique formelle aujourd'hui.

1 Le calcul des propositions

1.1 Le langage FPROP

Les formules du langage FPROP se construisent exclusivement à l'aide des symboles de l'alphabet $\Sigma = \{p, q, r, ', \neg, \wedge, (,)\}$.

Définition 1 *Les formules propositionnelles atomiques FPROPA sont définies par :*

1. $p, q, r \in FPROPA$
2. *Si* $\alpha \in FPROPA$ *alors* $\alpha' \in FPROPA$

Définition 2 *Les formules propositionnelles FPROP sont définies par :*

1.	*FPROPA* $\subset$ *FPROP*	
2.	*Si* $\varphi \in$ *FPROP alors* $\neg\varphi \in$ *FPROP*	*négation*
3.	*Si* φ *et* $\psi \in$ *FPROP alors* $(\varphi \wedge \psi) \in$ *FPROP*	*conjonction*

Définition 3 *On peut introduire les abréviations suivantes et augmenter ainsi le nombre d'opérateurs logiques :*

$(\varphi \mid \psi) := \neg(\varphi \wedge \psi)$	*exclusion (barre de Sheffer)*
$(\varphi \downarrow \psi) := (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	*conjonction négative*
$(\varphi \rightarrow \psi) := \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$	*conditionnelle*
$(\varphi \vee \psi) := \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	*disjonction*
$(\varphi \dot{\vee} \psi) := (\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi))$	*disjonction exclusive*
$(\varphi \leftrightarrow \psi) := (\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\neg\varphi \wedge \psi))$	*biconditionnelle*
$\perp := (p \wedge \neg p)$	*constante propositionnelle négative*
$\top := \neg(p \wedge \neg p)$	*constante propositionnelle positive*

La structure véritable des formules peut être rendue de manière plus visible par une représentation en arbre. Cet arbre montre le différents niveaux auxquels se situent les éléments qui constituent la formule. Voici une manière de construire une telle représentation :

Définition 4 *On peut associer à chaque formule* φ *de FPROP son arbre structurel* $AS(\varphi)$ *:*

$$AS(\alpha) \quad := \quad \alpha \qquad si\ \alpha \in \text{FPROPA}$$

$$AS(\neg\varphi) \quad := \quad \begin{array}{c} \neg \\ | \\ AS(\varphi) \end{array}$$

$$AS(\varphi \wedge \psi) \quad := \quad \begin{array}{ccc} & \wedge & \\ / & & \backslash \\ AS(\varphi) & & AS(\psi) \end{array}$$

Lorsqu'on veut montrer qu'une propriété $\mathcal{P}$ s'applique à toutes les formules φ de FPROP on utilise le principe d'induction sur la complexité des formules.

Proposition 1 *Nous noterons* $\mathcal{P}(\varphi)$ *le fait que* $\mathcal{P}$ *s'applique à* φ*. Si les trois conditions suivantes sont remplies*

1. *Pour tout* α *de FPROPA,* $\mathcal{P}(\alpha)$

2. Pour tout φ de FPROP, si $\mathcal{P}(\varphi)$ alors $\mathcal{P}(\neg\varphi)$

3. Pour tout φ et ψ de FPROP, si $\mathcal{P}(\varphi)$ et $\mathcal{P}(\psi)$, alors $\mathcal{P}(\varphi \wedge \psi)$

alors pour tout φ de FPROP, $\mathcal{P}(\varphi)$

Ce principe est justifié par le principe d'induction complète appliqué aux nombre d'opérateurs logiques apparaissant dans une formule. On suppose que la propriété est vraie pour des formules n'ayant aucun opérateur, c'est-à-dire les formules atomiques. Ensuite si elle est vraie pour toutes les formules ayant moins de n opérateurs, elle doit être vraie pour des formules ayant n opérateurs d'après les hypothèses 2 et 3. Donc elle est vraie pour toutes les formules.

1.2 Aspects sémantiques

La sémantique du calcul des propositions crée un lien entre les éléments de FPROP et une réalité extérieure constituée par l'ensemble des valeurs logiques, VAL $:= \{0, 1\}$. Pour nos besoins, 0 symbolise le faux, et 1 le vrai dans notre interprétation.

Définition 5 *Les concepts de* modèle *et de* valuation *sont définis par :*

1. *Si $\mathcal{M}$ $\subseteq$FPROPA alors $\mathcal{M}$ est un* modèle*, ou un* monde possible*.*
2. *Une fonction v :FPROPA$\rightarrow$VAL est une* valuation*.*

A chaque modèle $\mathcal{M}$ correspond une fonction caractéristique $\chi_{\mathcal{M}}$ qui est une valuation, et réciproquement, à chaque valuation v correspond une image réciproque de la valeur 1, $v^{-1}(\{1\})$ qui est un modèle. Nous avons donc la propriété suivante :

Proposition 2 *Il y a une correspondance bi-univoque entre les modèles et les valuations. Pour chaque modèle $\mathcal{M}$, χ_M est la valuation correspondante, et pour chaque valuation v, l'ensemble $v^{-1}(\{1\})$ est son modèle correspondant. On a toujours les deux égalités :*

1. $\mathcal{M} = \chi_{\mathcal{M}}^{-1}(\{1\})$
2. $\chi_{v^{-1}(\{1\})} = v$

Nous allons, sur la base de ce résultat, utiliser la notation $v_{\mathcal{M}}$ pour désigner la valuation correspondant à un modèle $\mathcal{M}$. $v_{\mathcal{M}}$ attribue ainsi une valeur 0 ou 1 à chaque formule atomique. On peut étendre le domaine de définition de cette valuation à toutes les formules propositionnelles de la manière suivante :

Définition 6 *Soit $\mathcal{M}$ un modèle et $v_{\mathcal{M}}$ la valuation qui lui est associée. On peut définir une valeur de cette fonction pour n'importe quelle formule de FPROP non atomique, par les définitions :*

1. $v_{\mathcal{M}}(\neg\varphi) := 1 - v_{\mathcal{M}}(\varphi)$
2. $v_{\mathcal{M}}(\varphi \wedge \psi) := v_{\mathcal{M}}(\varphi) \cdot v_{\mathcal{M}}(\psi)$ *ou* $\min(v_{\mathcal{M}}(\varphi), v_{\mathcal{M}}(\psi))$

Cette définition peut s'étendre aux opérations définies :

Proposition 3 *Valuation calculée pour les opérateurs définis, $\mathcal{M}$ étant un modèle fixé :*

1. $v_{\mathcal{M}}(\varphi \mid \psi) = 1 - v_{\mathcal{M}}(\varphi) \cdot v_{\mathcal{M}}(\psi)$
2. $v_{\mathcal{M}}(\varphi \downarrow \psi) = 1 - v_{\mathcal{M}}(\varphi) - v_{\mathcal{M}}(\psi) + v_{\mathcal{M}}(\varphi) \cdot v_{\mathcal{M}}(\psi)$
3. $v_{\mathcal{M}}(\varphi \rightarrow \psi) = 1 - v_{\mathcal{M}}(\varphi) + v_{\mathcal{M}}(\varphi) \cdot v_{\mathcal{M}}(\psi)$
4. $v_{\mathcal{M}}(\varphi \vee \psi) = v_{\mathcal{M}}(\varphi) + v_{\mathcal{M}}(\psi) - v_{\mathcal{M}}(\varphi) \cdot v_{\mathcal{M}}(\psi)$ *ou* $\max(v_{\mathcal{M}}(\varphi), v_{\mathcal{M}}(\psi))$
5. $v_{\mathcal{M}}(\varphi \dot{\vee} \psi) = v_{\mathcal{M}}(\varphi) + v_{\mathcal{M}}(\psi) - 2 \cdot v_{\mathcal{M}}(\varphi) \cdot v_{\mathcal{M}}(\psi)$
6. $v_{\mathcal{M}}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 - v_{\mathcal{M}}(\varphi) - v_{\mathcal{M}}(\psi) + 2 \cdot v_{\mathcal{M}}(\varphi) \cdot v_{\mathcal{M}}(\psi)$
7. $v_{\mathcal{M}}(\bot) = 0$
8. $v_{\mathcal{M}}(\top) = 1$

Définition 7 *Les informations contenues dans la définition 5 et la proposition 2 peuvent être résumées dans une* table de vérité *:*

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \mid \psi$	$\varphi \downarrow \psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \dot{\vee} \psi$	$(\varphi \leftrightarrow \psi$	$\bot$	$\top$
1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1

Définition 8 *Nous utiliserons la convention de notation suivante :*

$$\mathcal{M} \models \varphi \text{ ssi } v_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$$

Définition 9 *La notion de* conséquence logique *est définie par :*

$$\varphi \models \psi \text{ ssi, pour tout } \mathcal{M},\ v_{\mathcal{M}}(\varphi) \leq v_{\mathcal{M}}(\psi)$$

ou, de manière équivalente,

$$\varphi \models \psi \text{ ssi, pour tout } \mathcal{M}, \text{si } \mathcal{M} \models \varphi \text{ alors } \mathcal{M} \models \psi$$

Puisque $\top \models \varphi$ signifie que $v_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$ pour n'importe quel $\mathcal{M}$, nous noterons ce fait plus simplement par $\models \varphi$. De même, $\varphi \models \bot$ signifie que $v_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$ pour n'importe quel $\mathcal{M}$, ce que nous écrirons $\varphi \models$.

D'où la définition suivante :

Définition 10

$$\varphi \text{ est une } \textit{tautologie}, \text{ ssi } \models \varphi$$

$$\varphi \text{ est une } \textit{contradiction}, \text{ ssi } \varphi \models$$

Nous avons les propriétés suivantes :

Proposition 4

$$\begin{array}{lll} \varphi \models \psi & \text{ssi} & \varphi \wedge \neg\psi \models \\ & \text{ssi} & \models \neg\varphi \vee \psi \\ & \text{ssi} & \neg\psi \models \neg\, \varphi \end{array}$$

La deuxième ligne de ces propriétés peut aussi être interprétée de la manière suivante :

Théorème 5 *ψ est une* conséquence logique *de φ, ssi $\varphi \rightarrow \psi$ est une tautologie. Formellement :*

$$\varphi \models \psi \text{ ssi } \models \ \varphi \rightarrow \psi$$

Donc une conséquence logique peut être vérifiée ou falsifiée à l'aide d'une table de vérité ou du calcul des valuations.

On peut généraliser ces notions aux ensembles de formules.

Définition 11

$\models \Phi$:	Φ *est* tautologique	*ssi*	*pour tout $\mathcal{M}$, il existe un φ* tel que $v_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$
$\Phi \models$:	Φ *est* contradictoire	*ssi*	*pour tout $\mathcal{M}$, il existe un φ* tel que $v_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$
$\not\models \Phi$:	Φ *est* falsifiable	*ssi*	*il existe un $\mathcal{M}$, tel que pour tout φ, $v_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$*
$\Phi \not\models$:	Φ *est* vérifiable	*ssi*	*il existe un $\mathcal{M}$, tel que pour tout φ, $v_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$*

Définition 12 *Si $\Phi \models \psi$, on parle d'*argument logiquement valide*. Les formules φ_i de Φ sont appelés* hypothèses*, et la formule ψ la* conclusion *de l'argument.*

Voici quelques unes des formes d'arguments logiquement valides qu'on rencontre dans le discours argumentatif.

Proposition 6 *Quelques arguments logiquement valides :*

1. $\varphi, (\varphi \rightarrow \psi) \models \psi$ *(Modus ponens)*
2. $\neg\psi, (\varphi \rightarrow \psi) \models \neg\varphi$ *(Modus tollens)*
3. $\varphi \rightarrow \theta, \theta \rightarrow \psi \models \varphi \rightarrow \psi$ *(Enchaînement)*
4. $\varphi \vee \psi, \neg\psi \models \varphi$ *(Argument disjonctif)*
5. $\neg(\varphi \wedge \psi), \psi \models \neg\varphi$ *(Argument conjonctif)*
6. $\varphi \rightarrow \neg\varphi \models \neg\varphi$ *(Reduction à l'absurde)*
7. $\varphi \rightarrow \psi, \theta \rightarrow \chi, \neg\psi \vee \neg\chi \models \neg\varphi \vee \neg\theta$ *(Dilemme)*

Si deux formules sont des conséquences réciproques l'une de l'autre, elles sont équivalentes.

Définition 13 *L'équivalence logique est définie par :*

$$\varphi \equiv \psi \text{ ssi, pour tout } \mathcal{M},\ v_{\mathcal{M}}(\varphi) = v_{\mathcal{M}}(\psi)$$

Proposition 7 *Nous avons les équivalences suivantes :*

$$\begin{array}{cc}
\varphi \vee \varphi \equiv \varphi & \varphi \wedge \varphi \equiv \varphi \\
\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi & \varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi \\
\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta & \varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta \\
\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta) & \varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta) \\
\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi & \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi \\
\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi & \neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi \\
\neg\bot \equiv \top & \neg\top \equiv \bot
\end{array}$$

$$\neg\neg\varphi \equiv \varphi$$

*Ces équivalences expriment respectivement les lois de l'idempotence, de la commutativité, de l'associativité, de la distributivité, de l'absorption, les lois de De Morgan, et les propriétés du vrai-faux et de la double négation. L'ensemble FPROP forme donc avec les opérations de conjonction, de disjonction et de négation, et les constantes $\bot$ et $\top$, une structure d'*algèbre de Boole.

Une autre série d'équivalences, impliquant les constantes positives et négatives, est importante pour les applications :

Proposition 8 *Equivalences concernant les constantes :*

$$\begin{array}{cc}
\varphi \wedge \top \equiv \varphi & \varphi \vee \top \equiv \top \\
\varphi \wedge \bot \equiv \bot & \varphi \vee \bot \equiv \varphi \\
\\
\varphi \rightarrow \top \equiv \top & \varphi \rightarrow \bot \equiv \neg\varphi \\
\top \rightarrow \varphi \equiv \varphi & \bot \rightarrow \varphi \equiv \top \\
\\
\varphi \leftrightarrow \top \equiv \varphi & \varphi \dot{\vee} \top \equiv \neg\varphi \\
\varphi \leftrightarrow \bot \equiv \neg\varphi & \varphi \dot{\vee} \bot \equiv \varphi \\
\\
\varphi \downarrow \top \equiv \bot & \varphi \mid \top \equiv \neg\varphi \\
\varphi \downarrow \bot \equiv \neg\varphi & \varphi \mid \bot \equiv \top
\end{array}$$

Définition 14

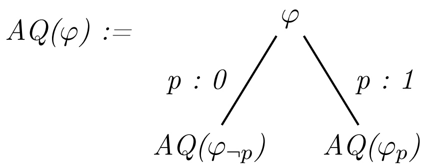
1. *Si p est une variable de φ, alors $\varphi[p := \top]$ est le résultat de la substitution de $\top$ pour p dans la formule φ*
2. *De même, $\varphi[p := \bot]$ est le résultat de la substitution de $\bot$ pour p dans la formule φ*
3. *$\varphi[p := \top] \equiv \varphi_p$, où l'expression de droite ne contient plus de sous-formule qui apparaisse à gauche d'une équivalence de la proposition précédente*

4. *$\varphi[p := \bot] \equiv \varphi_{\neg p}$, où l'expression de droite ne contient plus de sous-formule qui apparaisse à gauche d'une équivalence de la proposition précédente*
5. *φ_p est la* projection *de φ le long de p*
6. *$\varphi_{\neg p}$ est la* projection *de φ le long de $\neg p$*

Proposition 9 *Si p est une variable de φ, alors*

$$\varphi \equiv (\neg p \wedge \varphi_{\neg p}) \vee (p \wedge \varphi_p)$$

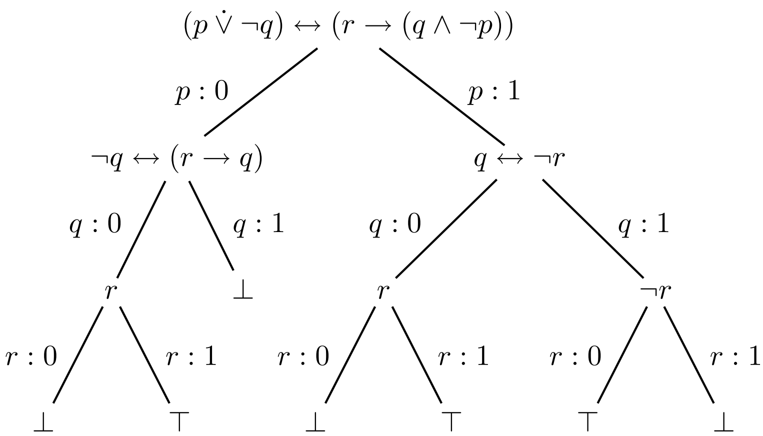
Définition 15 *L'arbre de Quine d'une formule est défini récursivement par :*



où p est une variable de φ.

Un arbre de Quine est complété, *si et seulement si toutes ses feuilles sont de la forme $\bot$ ou $\top$.*

Exemple d'un arbre de Quine complété : AQ($(p \dot\vee \neg q) \leftrightarrow (r \rightarrow (q \wedge \neg p))$).



A chaque formule φ on peut trouver une formule équivalente qui se présente sous une forme normale conjonctive ou disjonctive :

Définition 16

1. *l est un* littéral, *$l \in LIT$, si l est une formule atomique ou la négation d'une formule atomique*
2. *$C^\wedge$ est une* clause conjonctive, *$C^\wedge \in CLAC$, si $C^\wedge$ est une conjonction finie de littéraux*

3. $C^\vee$ *est une* clause disjonctive*,* $C^\vee \in CLAD$*, si* $C^\vee$ *est une disjonction finie de littéraux*
4. *Une formule* φ *est sous* forme normale disjonctive*, si* φ *est une disjonction finie de clauses conjonctives*
5. *Une formule* φ *est sous* forme normale conjonctive*, si* φ *est une conjonction finie de clauses disjonctives*

Théorème 10

1. *A chaque formule propositionnelle correspond une formule équivalente sous forme normale disjonctive*
2. *A chaque formule propositionnelle correspond une formule équivalente sous forme normale conjonctive*

Exemple. Soit $\varphi = \neg(p \to (q \leftrightarrow r))$. Voici deux formules sous forme normale disjonctive, respectivement conjonctive, qui sont équivalentes à la formule φ :

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \\ &\quad \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r) \end{aligned}$$

Définition 17

1. *Deux clauses disjonctives s'appellent* clauses parentes *si et seulement si elles comprennent deux littéraux complémentaires, c'est-à-dire qu'elles sont de la forme* $(\alpha \vee \varphi)$ *et* $(\neg\alpha \vee \psi)$ *où* α *est une formule atomique.*
2. *Deux clauses parentes engendrent une clause* résolvante $(\varphi \vee \psi)$
3. *Le* principe de la résolution *consiste à remplacer des clauses parentes par leurs résolvantes*

L'application du principe de résolution permet de trouver des conséquences logiques d'une formule, Exemple :

$(p \to q) \wedge (p' \to q') \wedge (\neg q \vee \neg q')$ entraîne $(\neg p \vee q') \wedge (\neg p' \vee q') \wedge (\neg q \vee \neg q')$, puis grâce à la résolution, $\neg p \vee \neg p'$.

1.3 Aspects syntaxiques

1.3.1 Arbres de preuve

La relation de conséquence logique, qui est sémantique par nature, en l'occurrence basée sur les notions de vrai et de faux, peut être imitée par une relation purement syntaxique. Pour cela nous introduisons la notion d'*arbre de preuve* dont la construction ne dépend que de la forme syntaxique des formules. Nous obtenons ainsi la relation de *dérivabilité*, équivalente à la relation de conséquence logique.

Définition 18 *L'arbre de preuve d'une formule φ est donné récursivement par les propriétés suivantes :*

1. *Si $\alpha \in FPROPA$, alors $AP(\alpha) := \alpha$ et $AP(\neg\alpha) := \neg\alpha$*
2. *$AP(\neg\neg\varphi) := AP(\varphi)$*
3. *$AP(\varphi \wedge \psi)$:=*
$$\begin{array}{c} (\varphi \wedge \psi) \\ | \\ AP(\varphi) \\ | \\ AP(\psi) \end{array}$$
4. *$AP(\neg(\varphi \wedge \psi))$:=*
$$\begin{array}{ccc} & \neg(\varphi \wedge \psi) & \\ \swarrow & & \searrow \\ AP(\neg\varphi) & & AP(\neg\psi) \end{array}$$
5. *Une branche de l'arbre de preuve est dite* fermée, *si elle contient une formule φ et sa négation $\neg\varphi$. On la note par une étoile :*
$$\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \\ \vdots \\ \neg\varphi \\ \vdots \\ \hline \star \end{array}$$
6. *Un arbre de preuve est dit* fermé, *si toutes ses branches sont fermées.*

Définition 19 *On peut généraliser la définition à l'arbre de preuve d'un ensemble de formules :*

L'arbre de preuve d'une ensemble Φ de formules est défini par

$$AP(\Phi) := AP(\wedge\Phi)$$

où $\wedge\Phi$ signifie la conjonction de toutes les formules de Φ.

Définition 20 *Un ensemble Φ de formules est dit* inconsistant, *noté par : $\Phi \vdash$, si et seulement si $AP(\Phi)$ est* fermé.

On peut alors définir la *dérivabilité*, l'analogue syntaxique de la notion d'*conséquence logique* :

Définition 21 *Une formule ψ est dérivable à partir de l'ensemble Φ, noté : $\Phi \vdash \psi$, si et seulement si $\Phi \cup \{\neg\psi\} \vdash$.*

Le résultat principal concernant les arbres de preuve établit l'équivalence entre les notions d'ensemble *contradictoire* et ensemble *inconsistant*, donc aussi entre les concepts de *conséquence logique* et *théorème* :

Théorème 11 *(Complétude)*

1. *$\Phi \models$ si et seulement si $\Phi \vdash$, c'est-à-dire si l'arbre de preuve $AP(\Phi)$ est fermé.*
2. *$\Phi \models \varphi$ si et seulement si $\Phi \vdash \varphi$*

1.3.2 Séquents de Gentzen

Une autre manière de définir la notion de dérivabilité, notion purement syntaxique, est donnée par les *séquents de Gentzen*. Les séquents imitent d'une certaine façon la démonstration mathématique courante, qui se présente comme une séquence de propositions, dont la dernière constitue la conclusion.

Définition 22 *Un séquent $\Gamma\varphi$ est constitué de deux parties : une suite de formules Γ, appelées* antécédents*, et une conclusion φ, appelée* conséquent*. Si un séquent a pu être établi, cela se note par $\vdash \Gamma\varphi$, ce qui s'interprète en termes de dérivabilité comme $\Gamma \vdash \varphi$, c'est-à-dire φ est un* théorème *de Γ. Les règles qui permettent d'établir des séquents sont les suivantes :*

R1 Règle des antécédents $\dfrac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma' \quad \varphi}$ *(Pour $\Gamma \subseteq \Gamma'$)*

R2 Règle des hypothèses : $\dfrac{}{\Gamma \quad \varphi}$ *(Si φ apparaît dans Γ)*

R3 Règle de preuve par distinction de cas : $\dfrac{\begin{array}{lll}\Gamma & \psi & \varphi \\ \Gamma & \neg\psi & \varphi\end{array}}{\Gamma \quad \varphi}$

R4 Règle de preuve par l'absurde : $\dfrac{\begin{array}{lll}\Gamma & \neg\varphi & \psi \\ \Gamma & \neg\varphi & \neg\psi\end{array}}{\Gamma \quad \varphi}$

R5 Règle de l'introduction de $\wedge$: $\dfrac{\begin{array}{ll}\Gamma & \varphi \\ \Gamma & \psi\end{array}}{\Gamma \quad (\varphi \wedge \psi)}$

R6 Règle de l'élimination de $\wedge$: $\dfrac{\Gamma \quad (\varphi \wedge \psi)}{\Gamma \quad \varphi}$ *ou,* $\dfrac{\Gamma \quad (\varphi \wedge \psi)}{\Gamma \quad \psi}$

Des règles dérivées, comme le modus ponens, une deuxième forme de la réduction à l'absurde ou des règles concernant d'autres opérateurs logiques que la négation et la conjonction, peuvent être établies à l'aide de ces seules règles. Par exemple :

Proposition 12 *Exemples de règles dérivées :*

1.
$$\begin{array}{c} \\ \hline (\varphi \lor \neg\varphi) \end{array}$$
(Tertium non datur)

2.
$$\begin{array}{lll} \Gamma & \varphi & \psi \\ \hline \Gamma & \neg\psi & \neg\varphi \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{lll} \Gamma & \varphi & \\ \Gamma & \varphi & \psi \\ \hline \Gamma & \psi & \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{lcc} \Gamma & \varphi & \psi \\ \hline \Gamma & (\varphi \to \psi) & \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{lc} \Gamma & \varphi \\ \Gamma & (\varphi \to \psi) \\ \hline \Gamma & \psi \end{array}$$
(Modus ponens)

6.
$$\begin{array}{lcc} \Gamma & \varphi & \chi \\ \Gamma & \psi & \chi \\ \hline \Gamma & (\varphi \lor \psi) & \chi \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi \\ \Gamma & \neg\varphi \\ \hline \Gamma & \psi \end{array}$$
(Réduction à l'absurde, deuxième forme)

Exemples de dérivation de quelques unes de ces règles à partir des règles adoptées plus haut.

La règle de la contraposition :

$$\begin{array}{llllr} \vdash & \varphi & \psi & & \text{hypothèse} \\ \vdash & \neg\psi & \varphi & \psi & \text{R1} \\ \vdash & \neg\psi & \neg\varphi & & \text{R4} \end{array}$$

ou la règle de l'enchaînement :

$$\begin{array}{lllll} \vdash & \Gamma & & \varphi & \text{hypothèse} \\ \vdash & \Gamma & \varphi & \psi & \text{hypothèse} \\ \vdash & \Gamma & \neg\varphi & \varphi & \text{R1} \\ \vdash & \Gamma & \neg\varphi & \neg\varphi & \text{R2} \\ \vdash & \Gamma & \neg\varphi & \psi & \text{R4} \\ \vdash & \Gamma & & \psi & \text{R3} \end{array}$$

ou la règle de détachement, appelée aussi le modus ponens

$\vdash$	Γ	φ			hypothèse
$\vdash$	Γ	$(\varphi \to \psi)$			hypothèse
$\vdash$	Γ	$\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$			élimination de la définition
$\vdash$	Γ	φ	$\neg\psi$	$\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$	R1
$\vdash$	Γ	φ	$(\varphi \wedge \neg\psi)$	ψ	règle dérivée 1.
$\vdash$	Γ	φ	$\neg\psi$	φ	R1
$\vdash$	Γ	φ	$\neg\psi$	$\neg\psi$	R1
$\vdash$	Γ	φ	$\neg\psi$	$(\varphi \wedge \neg\psi)$	R5
$\vdash$	Γ	φ	$\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$	ψ	règle dérivée 1.
$\vdash$	Γ	ψ			R3

La notion d'inconsistance peut être définie ainsi :

Définition 23 *Un ensemble Φ de formules est* inconsistant*, noté par $\Phi \vdash$, s'il existe une formule φ telle que $\Phi \vdash \varphi$ et $\Phi \vdash \neg\varphi$*

A nouveau, l'adéquation et la complétude peuvent être établies pour les séquents de Gentzen, comme le montre le théorème suivant. Cela signifie que la méthode des arbres de preuve et le système de dérivabilité basé sur les séquents sont équivalents.

Théorème 13 *(Complétude)*

1. *$\Phi \models$ si et seulement si $\Phi \vdash$, c'est-à-dire s'il existe une formule φ telle que $\vdash \Gamma\varphi$ et $\vdash \Gamma\neg\varphi$, où Γ est une séquence de formules de Φ*
2. *$\Phi \models \varphi$ si et seulement si $\Phi \vdash \varphi$*

Il a donc été possible de trouver des équivalents purement syntaxiques à la notion sémantique de conséquence logique. Nous avons vu pour cela les arbres de preuve et les séquents de Gentzen, dont nous avons montré la complétude. D'autres relations syntaxiques sont par exemple la déduction naturelle, qui remonte à Gentzen également, et l'approche axiomatique dans le style de Hilbert.

2 Le calcul des prédicats

2.1 Le langage FPRED

Certains types d'argumentation, qui nous paraissent valides échappent cependant à l'analyse par propositions. C'est le cas du raisonnement favori des manuels de logique : "Tout homme est mortel, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel". Ce raisonnement, clairement valide à nos yeux, ne peut pas être analysé efficacement par la notion de proposition. En effet, il est constitué de trois propositions atomiques indépendantes ! Le lien entre ces phrases se situe à un niveau plus élémentaire et fait intervenir la notion d'*individu*. Nous aurons trois concepts nouveaux dans la logique des prédicats :

- les désignateurs d'individus : les *constantes* et les *variables*
- les *prédicats*, chacun avec son *rang*
- les *quantificateurs*

Définition 24 *Formellement :*

1. *Les constantes :* $C = \{a, b, c, a', b', c', \ldots\}$
2. *Les variables :* $C = \{x, y, z, x', y', z', \ldots\}$
3. *Les termes :* $T = C \cup V$
4. *Pour chaque* $i \in \mathbb{N}$, $Pred_i = \{P_i, Q_i, R_i, P'_i, Q'_i, R'_i, \ldots\}$, *où* i *est le* rang *du prédicat*
5. *Le quantificateur universel :* $\forall$

Les formules du calcul des prédicats, FPRED, sont définies récursivement de la manière suivante :

Définition 25

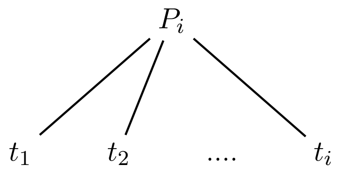
1. *Les formules atomiques* FPREDA *:*
   Si $\pi \in Pred_i$ *et pour* $n = 1, \ldots, i$ *on a* $t_n \in T$, *alors* $\pi t_1 t_2 \ldots t_i \in$ FPREDA
2. *Si* $\varphi, \psi \in$ FPRED, *alors* $\neg\varphi \in$ FPRED *et* $(\varphi \wedge \psi) \in$ FPRED
3. *Si* $\nu \in V$ *et* $\varphi \in$ FPRED, *alors* $\forall\nu\varphi \in$ FPRED

Les définitions pour les autres opérateurs propositionnels comme la disjonction, la conditionnelle, la bi-conditionnelle et la disjonction exclusive sont identiques aux définitions données dans le cadre du calcul propositionnel. Par le biais de définitions, on peut également introduire de nouveaux quantificateurs, dont le quantificateur existentiel :

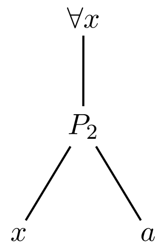
Définition 26 *On peut introduire l'abréviation suivante :*

$$\neg\forall x\neg\varphi =: \exists x\varphi$$

Les arbres structurels se construisent également de la même façon que dans le cas propositionnel, avec les conventions suivantes pour les prédicats et les quantificateurs :

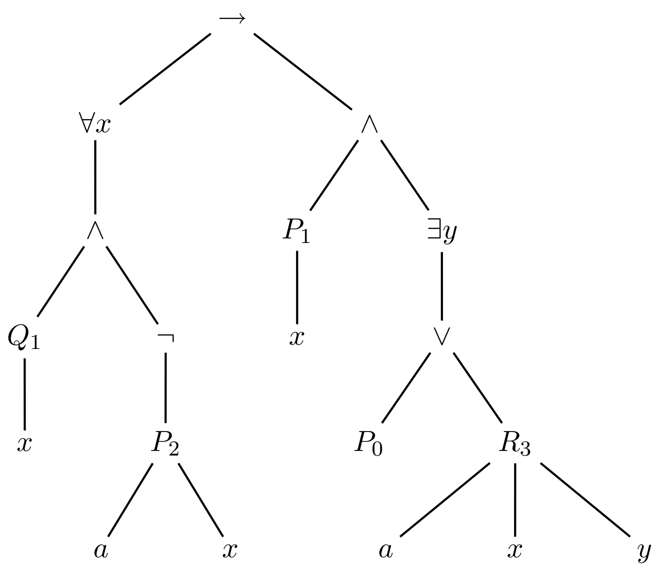


pour un prédicat de rang i, et



pour un quantificateur qui porte sur la variable x. Voici un exemple d'arbre structurel pour une formule du calcul des prédicats :

L'arbre structurel de $(\forall x(Q_1 x \wedge \neg P_2 ax) \rightarrow (P_1 x \wedge \exists y(P_0 \vee R_3 axy)))$ est :



Si une occurrence d'une variable est dominée par un quantificateur du même nom, c'est-à-dire si en remontant dans l'arbre structurel à partir de la variable on rencontre un quantificateur du même nom, alors la variable est *liée* pour cette occurrence. (Plus précisément elle est liée par le *premier* quantificateur du même nom qu'on rencontre). Dans les autres cas elle est *libre*. Une variable peut être libre et liée à la fois dans une formule, comme le montre le cas de la variable x dans l'exemple précédent.

Définition 27

1. *Une formule de FPRED est dite* fermée *si elle ne contient pas de variable libre. Elle est* ouverte *dans le cas contraire*
2. *Nous noterons FPREDAF et FPREDF respectivement les formules atomiques fermées et les formules fermées en général*

L'opération de substitution d'une constante a pour une variable x dans une formule φ, est notée $\varphi[x := a]$, peut être définie par les règles récursives suivantes :

Définition 28

1. *Pour les formules atomiques, chaque occurrence de la variable est remplacée par la constante. Par exemple* $P_4xayb[x := a] = P_4aayb$
2. $(\neg\varphi)[x := a] = \neg(\varphi[x := a])$
3. $(\varphi \wedge \psi)[x := a] = (\varphi[x := a] \wedge \psi[x := a])$
4. $(\forall x\varphi)[x := a] = \forall x\varphi$ *et* $(\forall y\varphi)[x := a] = \forall y(\varphi[x := a])$

2.2 Aspects sémantiques

Une formule fermée se situe au niveau des propositions, elle est soit vraie, soit fausse. Ce n'est pas le cas pour les formules ouvertes. Nous pouvons définir la notion de modèle ainsi :

Définition 29

Un modèle *(ou monde possible)* $\mathcal{M}$*, est défini par :* $\mathcal{M} \subseteq FPREDAF$

A chaque modèle correspond une valuation, c'est-à-dire une fonction $v_{\mathcal{M}}$: FPREDF $\longrightarrow \{0, 1\}$ définie récursivement de la manière suivante :

Définition 30

1. $v_{\mathcal{M}}(\alpha) = 1$ *si et seulement si* $\alpha \in \mathcal{M}$
2. $v_{\mathcal{M}}(\neg\varphi) = 1 - v_{\mathcal{M}}(\varphi)$
3. $v_{\mathcal{M}}(\varphi \wedge \psi) = v_{\mathcal{M}}(\varphi) \cdot v_{\mathcal{M}}(\psi) = min(v_{\mathcal{M}}(\varphi), v_{\mathcal{M}}(\psi))$
4. $v_{\mathcal{M}}(\forall x\varphi) = \min_{t \in C} v_{\mathcal{M}}(\varphi[x := t])$

Les relations de conséquence logique et d'équivalence logique se définissent de la même manière que dans le cas propositionnel, à l'aide de la notion de modèle.

Définition 31 *La notion de* conséquence logique *est définie par :*

$$\varphi \models \psi \text{ ssi, pour tout } \mathcal{M},\ v_{\mathcal{M}}(\varphi) \leq v_{\mathcal{M}}(\psi)$$

ou, de manière équivalente,

$$\varphi \models \psi \text{ ssi, pour tout } \mathcal{M}, \text{si } \mathcal{M} \models \varphi \text{ alors } \mathcal{M} \models \psi$$

On peut généraliser ces notions aux ensembles de formules de la même façon que nous l'avions fait dans le cas des propositions.

Définition 32

$\models \Phi$:	Φ *est* tautologique	*ssi*	*pour tout* $\mathcal{M}$*, il existe un* φ tel que $v_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$
$\Phi \models$:	Φ *est* contradictoire	*ssi*	*pour tout* $\mathcal{M}$*, il existe un* φ tel que $v_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$
$\not\models \Phi$:	Φ *est* falsifiable	*ssi*	*il existe un* $\mathcal{M}$*, tel que pour tout* φ*,* $v_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$
$\Phi \not\models$:	Φ *est* vérifiable	*ssi*	*il existe un* $\mathcal{M}$*, tel que pour tout* φ*,* $v_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$

Définition 33 *L'équivalence logique est définie par l'équivalence logique dans les deux sens :*

$$\varphi \equiv \psi \text{ ssi, pour tout } \mathcal{M},\ v_{\mathcal{M}}(\varphi) = v_{\mathcal{M}}(\psi)$$

Exemple. Ces définitions nous autorisent à établir la validité du raisonnement "Tout homme est mortel. Socrate est un homme. Donc Socrate est mortel". Nous introduisons les conventions suivantes pour formaliser les concepts qui entrent dans ce raisonnement : P_1x signifie : x est un homme, et Q_1x : x est mortel, et finalement a désigne Socrate. Le raisonnement devient formellement :

$$\forall x(P_1x \to Q_1x), P_1a \models Q_1a$$

Si les valeurs logiques des deux hypothèses sont 1, alors la conclusion doit aussi avoir la valeur 1 pour que le raisonnement soit logiquement valide. Nous avons :

$$v_{\mathcal{M}}\forall x(P_1x \to Q_1x) = min_{t\in C}v_{\mathcal{M}}(P_1t \to Q_1t) = 1$$

et donc

$$v_{\mathcal{M}}(P_1a \to Q_1a) = 1 = (1 - v_{\mathcal{M}}(P_1a) - v_{\mathcal{M}}(P_1a) \cdot v_{\mathcal{M}}(Q_1a))$$

par conséquent

$$v_{\mathcal{M}}(P_1a) = v_{\mathcal{M}}(P_1a) \cdot v_{\mathcal{M}}(Q_1a) \text{ donc } v_{\mathcal{M}}(Q_1a) = 1 \text{ si } v_{\mathcal{M}}(P_1a) = 1$$

Le raisonnement est donc valide.

2.3 Aspects syntaxiques

2.3.1 Les arbres de preuve

La notion d'arbre de preuve que nous avions développée dans le cas du calcul des propositions peut être étendue aux formules du calcul des prédicats, c'est-à-dire à la logique du premier ordre. La définition doit simplement être complétée de quelques règles nouvelles :

Définition 34

1. $AP(\neg\forall x\varphi)$:=

$$\begin{array}{c} \neg\forall x\varphi \\ | \\ AP(\exists x\neg\varphi) \end{array}$$

2. $AP(\neg\exists x\varphi)$:=

$$\begin{array}{c} \neg\exists x\varphi \\ | \\ AP(\neg\forall x\varphi) \end{array}$$

3. $AP(\forall x\varphi)$:=

$$\begin{array}{c} \forall x\varphi \\ | \\ AP(\varphi[x := t]) \end{array}$$

pour toute constante t

4. $AP(\exists x\varphi)$:=

$$\begin{array}{c} \exists x\varphi \\ | \\ AP(\varphi[x := t]) \end{array}$$

si t n'apparaît pas plus haut dans l'arbre

Les notions d'arbre fermé, d'ensemble de formules inconsistant et de dérivabilité sont définies comme dans le cas du calcul des propositions.

Pour illustrer la méthode syntaxique des arbres de preuve, voici l'exemple classique de Socrate, évoqué plus haut. Ce raisonnement est valide si :

$$\forall x(P_1x \to Q_1x), P_1a \vdash Q_1a$$

ou, de manière équivalente,

$$\{\forall x(P_1x \rightarrow Q_1x), P_1a, \neg Q_1a\} \vdash$$

Dans cette formalisation, P_1x signifie : "x est un homme", Q_1x signifie : " x est mortel" et a désigne "Socrate". Il reste à montrer que l'arbre de preuve de l'ensemble $\{\forall x(P_1x \rightarrow Q_1x), P_1a, \neg Q_1a\}$ est fermé. Voici cet arbre :

$$\begin{array}{ccc}
 & \forall x(P_1x \rightarrow Q_1x) & \\
 & | & \\
 & P_1a & \\
 & | & \\
 & \neg Q_1a & \\
 & | & \\
 & P_1a \rightarrow Q_1a & \\
 / & & \backslash \\
 \underline{\neg P_1a} & & \underline{Q_1a} \\
 \star & & \star
\end{array}$$

2.3.2 Les séquents

La méthode des séquents de Gentzen, déjà exposée dans la partie sur le calcul propositionnel, peut être étendue au cas du calcul des prédicats en rajoutant les règles concernant les quantificateurs.

Définition 35

1. *Elimination de* $\forall$ *:* $\dfrac{\Gamma \quad \forall x\varphi}{\Gamma \quad \varphi[x := t]}$

2. *Introduction de* $\exists$ *:* $\dfrac{\Gamma \quad \varphi[x := t]}{\Gamma \quad \exists x\varphi}$

3. *Introduction de* $\forall$ *:* $\dfrac{\Gamma \quad \varphi[x := t]}{\Gamma \quad \forall x\varphi}$ *Si* t *n'apparaît pas dans* $\Gamma\varphi$

Voici un exemple d'utilisation des séquents, tout d'abord l'argument de Socrate :

$\vdash$	$\forall x(P_1x \rightarrow Q_1x)$	P_1a	$\forall x(P_1x \rightarrow Q_1x)$	R2
$\vdash$	$\forall x(P_1x \rightarrow Q_1x)$	P_1a	$(P_1a \rightarrow Q_1a)$	Elimination de $\forall$
$\vdash$	$\forall x(P_1x \rightarrow Q_1x)$	P_1a	P_1a	R2
$\vdash$	$\forall x(P_1x \rightarrow Q_1x)$	P_1a	Q_1a	modus ponens

Un deuxième exemple montre comment établir $\vdash \exists x(P_1x \rightarrow \forall y P_1y)$:

$\vdash$	$\neg\exists x(P_1 x \to \forall y P_1 x)$	$\neg\exists x(P_1 x \to \forall y P_1 y)$	R2
$\vdash$	$\neg\exists x(P_1 x \to \forall y P_1 x)$	$\forall x \neg(P_1 x \to \forall y P_1 y)$	Définition de $\exists$
$\vdash$	$\neg\exists x(P_1 x \to \forall y P_1 x)$	$\neg(P_1 a \to \forall y P_1 y)$	Elimination de $\forall$
$\vdash$	$\neg\exists x(P_1 x \to \forall y P_1 x)$	$P_1 a \wedge \neg\forall y P_1 y$	Définition de $\to$
$\vdash$	$\neg\exists x(P_1 x \to \forall y P_1 x)$	$P_1 a$	Elimination de $\wedge$
$\vdash$	$\neg\exists x(P_1 x \to \forall y P_1 x)$	$\neg\forall y P_1 y$	Elimination de $\wedge$
$\vdash$	$\neg\exists x(P_1 x \to \forall y P_1 x)$	$\forall y P_1 y$	Introduction de $\forall$
$\vdash$	$\exists x(P_1 x \to \forall y P_1 x)$		R4

2.4 Complétude de la logique du premier ordre

Les deux systèmes syntaxiques introduits, les arbres de preuve et les séquents de Gentzen, sont complets par rapport à la notion de conséquence logique et on peut tout simplement reprendre les théorèmes de complétude déjà énoncés.

Pour les arbres de preuve :

Théorème 14 *(Complétude des arbres de preuve)*

1. $\Phi \models$ *si et seulement si* $\Phi \vdash$, *c'est-à-dire si l'arbre de preuve* $AP(\Phi)$ *est fermé.*
2. $\Phi \models \varphi$ *si et seulement si* $\Phi \vdash \varphi$

ainsi que pour les séquents :

Théorème 15 *(Complétude des séquents de Gentzen)*

1. $\Phi \models$ *si et seulement si* $\Phi \vdash$, *c'est-à-dire s'il existe une formule* φ *telle que* $\vdash \Gamma\varphi$ *et* $\vdash \Gamma\neg\varphi$, *où* Γ *est une séquence de formules de* Φ
2. $\Phi \models \varphi$ *si et seulement si* $\Phi \vdash \varphi$

Ces deux résultats de complétude montrent l'adéquation d'un système syntaxique pour traiter de la notion sémantique de *vérité* dans un cadre précis. Ils donnent par-là une réponse à certaines interrogations de Leibniz et de philosophes plus anciens encore comme Aristote ou Lulle. Un premier résultat de complétude de la logique du premier ordre est dû à Gödel (1928).

Références

[1] J. Largeault, *La logique*, P.U.F., 1993.

[2] F. Lepage, *Elements de logique contemporaine, Deuxième édition revue et augmentée*, Presses de l'Université de Montréal, 2001.

[3] J. Leroux, *Introduction à la logique*, Diderot, 1998.

[4] T. Lucas, I. Berlanger, I. De Greef, *Initiation à la logique formelle*, de Boeck, 2003.

[5] F. Rivenc, *Introduction à la logique*, Payot, 1989.

[6] D. Vernant, *Introduction à la logique standard*, Flammarion, 2001.

Quelques suggestions de livres en anglais :

[7] D. Bostock, *Intermediate Logic*, Oxford, 1997.

[8] H.D. Ebbinghaus, J. Flum & W. Thomas, *Mathematical Logic*, Springer, 1984.

[9] R. M. Smullyan, *First-order Logic*, Dover, 1995.

Table des matières