Logique

- Logique des propositions
- Lien avec la théorie des ensembles
- Algèbre de boole
- Méthodes de simplification des fonctions booléennes

Objectifs

- Traiter formellement les notions de vérité et de fausseté
- Formaliser ce qu'on appelle le « raisonnement logique » ou la « déduction logique »

Exemple

- De : Quand il pleut Paul prend toujours son parapluie
- Et : Aujourd'hui Paul a son parapluie
- Peut-on conclure : Aujourd'hui il pleut ?

Une énigme policière

- Un meurtre a été commis au laboratoire, le corps se trouve dans la salle de conférences…
- On dispose des informations suivantes :
  - La secrétaire déclare qu'elle a vu l'ingénieur dans le couloir qui donne sur la salle de conférences
  - Le coup de feu a été tiré dans la salle de conférences, on l'a donc entendu de toutes les pièces voisines
  - L'ingénieur affirme n'avoir rien entendu
- On souhaite démontrer que si la secrétaire dit vrai, alors l'ingénieur ment

Logique des propositions Syntaxe

- On définit :
  - Les propositions : a, b, c, …
  - Les constantes : Vrai et Faux
  - Les connecteurs :
    - □ (conjonction)
    - (disjonction)
    - □ (négation)
    - (implication)

Construction d'une formule

- Une proposition est une formule
- Si X et Y sont des formules, alors □X, X Y, X□Y, X Y sont des formules
- On utilise de plus les parenthèses pour lever des ambiguïtés
- Exemples:
  - a □ (c v □d)
  - (a v b)   □c

Logique des propositions Sémantique

- Les formules sont interprétées dans {Vrai,Faux}
- On définit l'interprétation associée à chaque connecteur grâce aux tables de vérité

L'opérateur ET

X	Y	X □ Y
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Faux	Faux	Faux

Les deux doivent être vrais pour que le ET soit vrai

L'opérateur OU

X	Y	X Y
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Faux

Il suffit que l'un des deux soit vrai pour que le OU soit vrai

L'opérateur NON

X	¬X
Vrai	Faux
Faux	Vrai

L'opérateur implique

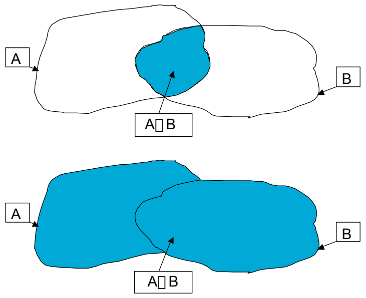
X	Y	X Y
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai

X Y signifie que si X est vrai alors Y est vrai
Le faux implique n'importe quoi

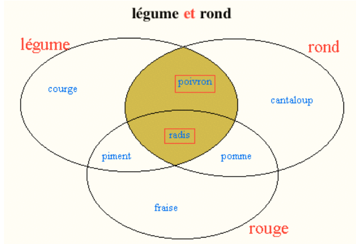
Lien avec la théorie des ensembles

- A□B si et seulement si pour tout x, (x□A x□B)
- A=B si et seulement si pour tout x, (x□A □ x□B)
- A□B = {x□E; (x□A x□B)}
- A□B = {x□E; (x□A □ x□B)}

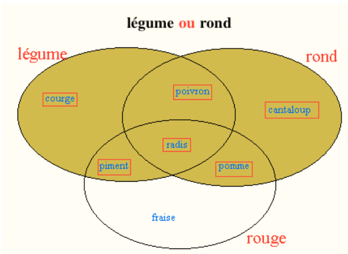
Diagrammes de Venn



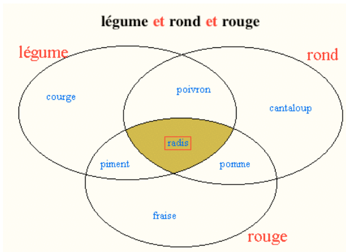
Comprendre le ET et le OU à l'aide des diagrammes de Venn



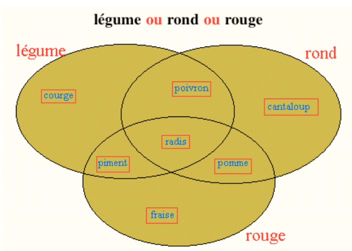
Comprendre le ET et le OU à l'aide des diagrammes de Venn



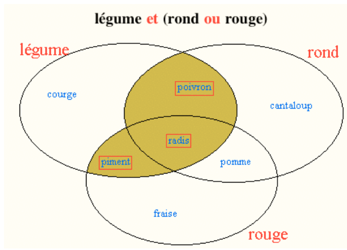
Comprendre le ET et le OU à l'aide des diagrammes de Venn



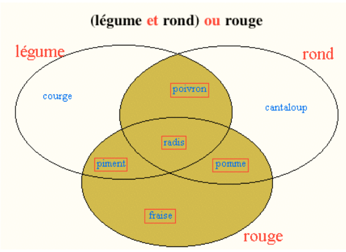
Comprendre le ET et le OU à l'aide des diagrammes de Venn



Comprendre le ET et le OU à l'aide des diagrammes de Venn



Comprendre le ET et le OU à l'aide des diagrammes de Venn



Autre définition de l'implication

- On peut aussi définir l'implication en disant : X   Y = □X Y
- On retrouve la même table de vérité :

X	Y	□X	□X Y
Vrai	Vrai	Faux	Vrai
Vrai	Faux	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai	Vrai

Conditions nécessaires et suffisantes

- Lorsqu'on écrit X   Y :
  - X est la condition suffisante de Y, et on dit X seulement si Y
  - Y est la condition nécessaire de X, et on dit Y si X
- Dérivable   continue
- Pleuvoir   prendre le parapluie

Définition de l'équivalence

- X□ Y = (X   Y)□(Y   X)
- X est une condition nécessaire et suffisante pour Y, et on dit X si et seulement si Y
- Y est une condition nécessaire et suffisante pour X, et on dit Y si et seulement si X

Définition du OU-exclusif

- Le OU logique est dit *inclusif*. Le OU exclusif est celui du langage courant : fromage *ou* dessert.

X	Y	X OU-ex Y
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Le OU-ex est vrai si l'un des deux est vrai mais pas les deux en même temps

Propriétés des formules

- Une formule est valide si elle est toujours vraie (quelque soit l'interprétation)
- Une formule est consistante s'il existe une interprétation dans laquelle elle est vraie. Elle est inconsistante dans le cas contraire
- Problème : étant donnée une formule, est-elle valide ? consistante ?
- Exemple : que dire de la formule
  (a   b)   (□b   □a)

Dressons la table de vérité

a	b	a b	¬b	¬a	¬b ¬a	(a b) (□b □a)
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Conclusion

- Quelles que soient les valeurs de a et b, cette formule est toujours vraie. Elle est donc valide.
- On peut montrer également que
  (¬a ¬b) (b a)
- C'est la contraposée des mathématiques

Règles de transformation (1)

- Toutes les formules qui suivent sont valides. Elles sont utiles pour simplifier des formules. Elles peuvent se démontrer en établissant leurs tables de vérité.
- X ¬X = V (tiers exclu)
- X□¬X = F (contradiction)
- ¬¬X = X (involution)
- X X = X□X = X (idempotence)

Règles de transformation (2)

- □V = F, □F = V
- F□X = F, V□X = X, F X = X, V X = X
  - Faux est élément neutre pour le OU et absorbant pour le ET
  - Vrai est élément neutre pour le ET et absorbant pour le OU
- X□(X Y) = X, X (X□Y) = X (absorption)
- X+¬X.Y=X+Y
- X Y = □X Y

Règles de transformation (3)

- Lois de De Morgan :
  - □(X Y) = □X □ □Y
  - □(X□Y) = □X □Y
- ((X Y) □X) Y (modus ponens)
- ((X Y) □□Y) □X (modus tollens)
- (X Y) = (□Y □X) (contraposition)

Règles de transformation (4)

- Commutativité et associativité de et □
  - X Y=Y X, X□Y=Y□X
  - X (Y Z)=(X Y) Z=X Y Z
  - X□(Y□Z)=(X□Y)□Z=X□Y□Z
- Distributivité de par rapport à □ et de □ par rapport à
  - X (Y□Z)=(X Y)□(X Z), X□(Y Z)=(X□Y) (X□Z)
- Transitivité de
  - ((X Y)□(Y Z)) (X Z)

Règles de transformation (5)

- F X = V
- V X = X
- X F = □X
- X V = V

N. Duclosson — Licence Lyon1 - UE IF1 — 31

Exemple d'application des règles de transformation

- ¬(p q)

  = ¬(¬p q)

  = ¬¬p□¬q

  = p□¬q

N. Duclosson — Licence Lyon1 - UE IF1 — 32

Retour sur la théorie des ensembles

- On a vu qu'il y a une analogie entre
  - □ et □
  -   et □
- Les règles de transformation donnent :
  - A□A=A, A□A=A (idempotence)
  - A□B=B□A, A□B=B□A (commutativité)
  - A□(B□C)=(A□B)□C=A□B□C(associativité)
  - A□(B□C)=(A□B)□C=A□B□C(associativité)
  - A□(B□C)=(A□B)□(A□C) (distributivité)
  - A□(B□C)=(A□B)□(A□C) (distributivité)

N. Duclosson — Licence Lyon1 - UE IF1 — 33

Retour sur l'énigme policière

- Un meurtre a été commis au laboratoire, le corps se trouve dans la salle de conférences…
- On dispose des informations suivantes :
  - La secrétaire déclare qu'elle a vu l'ingénieur dans le couloir qui donne sur la salle de conférences
  - Le coup de feu a été tiré dans la salle de conférences, on l'a donc entendu de toutes les pièces voisines
  - L'ingénieur affirme n'avoir rien entendu
- On souhaite démontrer que si la secrétaire dit vrai, alors l'ingénieur ment

N. Duclosson — Licence Lyon1 - UE IF1 — 34

Formalisation en calcul des propositions

- p : la secrétaire dit vrai
- q : l'ingénieur était dans le couloir au moment du crime
- r : l'ingénieur était dans une pièce voisine de la salle de conférences
- s : l'ingénieur a entendu le coup de feu
- t : l'ingénieur dit vrai

N. Duclosson — Licence Lyon1 - UE IF1 — 35

Résolution de l'énigme

- Les informations de l'énoncé se traduisent par les implications :

  p q, q r, r s, t □s
- Il s'agit de prouver la validité de la formule :

  (p q □q r□r s□t □s) (p □t)

N. Duclosson — Licence Lyon1 - UE IF1 — 36

Démonstration

(p q □ q r □ r s □ t □s) (p □t)

- La formule ne peut être fausse que si
  - (p □t) est faux, soit p et t vrais
  - la prémisse est vraie, soit toutes les implications vraies
- Comme t doit être vrai, s doit être faux, donc r faux, donc q faux, donc p faux, et il y a contradiction

Applications de la logique en informatique

- En algorithmique : nier des conditions, spécifier des invariants, des pré-conditions et des post-conditions
- En architecture : portes logiques pour les composants des circuits intégrés
- En base de données : interprétation logique des BD, logique pour l'interrogation des BD, expression des contraintes d'intégrité, BD déductives
- En Intelligence Artificielle : représentation des connaissances, systèmes experts

Algèbre de Boole

- En informatique, on utilise plutôt 1 (le courant passe) à la place de Vrai et 0 (le courant ne passe pas) à la place de Faux

A	B	□A	A□B	A B
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

Les connecteurs en Algèbre de Boole

- On obtient les relations suivantes :
  - ¬X=1-X qu'on notera $\bar{X}$
  - X□Y=X.Y
  - X Y=min(X+Y,1) qu'on notera X+Y
- On remplace X Y par ¬X Y, soit $\bar{X}$+Y

Ecriture des règles de transformation en algèbre de Boole (1)

- $X+\bar{X}=1$, $X.\bar{X}=0$ (tiers exclu, contradiction)
- $\bar{\bar{X}}=X$,X+X=X, X.X=X (involution, idempotence)
- $\bar{0}=1$, $\bar{1}=0$
- X+0=X, X.0=0, X+1=1, X.1=X (éléments neutres et absorbants)
- X.(X+Y)=X, X+X.Y=X (absorption)
- $X+\bar{X}.Y=X+Y$
- $\overline{X+Y}=\bar{X}.\bar{Y}$, $\overline{X.Y}=\bar{X}+\bar{Y}$ (De Morgan)

Ecriture des règles de transformation en algèbre de Boole (2)

- X+Y=Y+X, X.Y=Y.X (commutativité)
- X+(Y+Z)=(X+Y)+Z=X+Y+Z(associativité)
- X.(Y.Z)=(X.Y).Z=X.Y.Z (associativité)
- X.(Y+Z)=X.Y+X.Z (distributivité)
- X+Y.Z=(X+Y).(X+Z) (distributivité)

Fonctions booléennes

- En algèbre de boole, on parle de fonctions booléennes plutôt que de formules.
- Exemple : $F = a(b+\bar{c})+bc\bar{a}$
- On peut aussi définir une fonction booléenne à partir de sa table de vérité

Exemple : une fonction “majorité”

a	b	c	M
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$M = \bar{a}bc+a\bar{b}c+ab\bar{c}+abc$

Pourquoi simplifier une fonction booléenne ?

- Pour dresser plus facilement sa table de vérité
- Pour concevoir un circuit intégré réalisant la fonction avec le moins de portes logiques possible

Exemple à l’aide des règles de l’algèbre de Boole

- Reprenons la fonction “majorité”
- $M = \bar{a}bc+a\bar{b}c+ab\bar{c}+abc$
  $= bc(\bar{a}+a)+a(\bar{b}c+b\bar{c})$
  $= bc+a(\bar{b}c+b\bar{c})$
- Peut-on trouver plus simple ?

Deuxième exemple

- $F = abc+a(b\bar{c}+\bar{b}c)$
  $= abc+ ab\bar{c}+a\bar{b}c$
  $= ab(c+\bar{c})+a\bar{b}c$
  $= ab+a\bar{b}c$
  $= a(b+\bar{b}c)$
  $= a(b+c)$

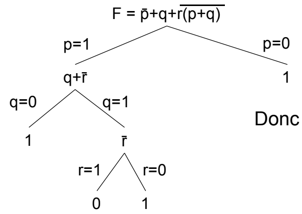
Méthodes de simplification des fonctions booléennes

- Deux méthodes permettent de simplifier plus efficacement des fonctions compliquées que la seule application des règles de l’algèbre de Boole.
- Les diagrammes de Quine
- Les tables de Karnaugh

Méthode des diagrammes de Quine

- Principe :
  - On choisit une des variables qui interviennent le plus souvent dans la fonction booléenne à simplifier
  - On considère le cas où elle vaut 0 et le cas où elle vaut 1
  - On simplifie les deux expressions obtenues
  - On itère le processus sur les deux expressions simplifiées

Exemple



Donc $F = pq+pq\bar{r}+\bar{p}$

Utilisation des diagrammes de Quine

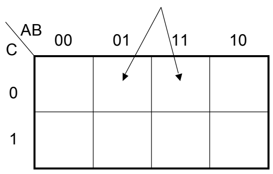
- Les diagrammes de Quine permettent de mettre une fonction booléenne sous la forme d'une somme de produits.
- Ils permettent aussi de vérifier la validité d'une expression booléenne : toutes les feuilles sont-elles égales à 1 ?

Méthode des tables de Karnaugh

- La fonction doit être en premier lieu exprimée comme une somme de produits. Pour ce faire, on utilise les règles de l'algèbre de Boole ou les diagrammes de Quine.
- On dresse ensuite une table de Karnaugh, qui est une table de vérité à deux dimensions. Sur chaque dimension on peut représenter les valeurs possibles de deux variables.

Table de Karnaugh à 3 variables

Entre deux cases adjacentes, seule la valeur d'une variable change



Remplir la table de Karnaugh

- On met 1 dans une case de la table si la fonction est vraie pour les valeurs des variable correspondant à cette case.
- On procède à des regroupements de 1 adjacents.
- On cherche à effectuer les groupements les plus grands afin de simplifier au maximum.
- Les regroupements sont des rectangles de 2^n termes.

Retour sur la fonction “majorité” 1. Remplir la table

a	b	c	M
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$M = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$

C \ AB	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

Retour sur la fonction “majorité” 2. Simplifier

C \ AB	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

Donc F= BC + AB + AC

C’est plus simple que ce qu’on avait trouvé avec les règles de l’algèbre de Boole

Table de Karnaugh à 4 variables

DC \ BA	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Exemples de simplification sur des tables de Karnaugh à 4 variables (1)

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

S=A

DC \ BA	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

S=$\bar{C}$

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	1	1

S=DB

Ici les deux lignes sont bien adjacentes

Exemples de simplification sur des tables de Karnaugh à 4 variables (2)

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	0	0	0

S=C$\bar{A}$

DC \ BA	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

S=$\bar{C}\bar{A}$

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

S=CA

Et pour 5 variables ?

DC \ BA	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

E= 0

DC \ BA	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

E= 1